



seit 1558

# Berechnung der Winkelverteilung und Polarisation Thomson-gestreuter Photonen: Vergleich zwischen ebenen Wellen und Twisted Light

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science (B. Sc.) im Studiengang  
Physik

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
Physikalisch-Astronomische Fakultät

eingereicht am 30. September 2014 von Sebastian Stock  
geboren am 21. März 1993 in Aalen

Erstgutachter: Prof. Dr. Stephan Fritzsche  
Theoretisch-Physikalisches Institut  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Zweitgutachter: Dr. Daniel Seipt  
Helmholtz-Institut Jena

# Zusammenfassung

Die Thomson-Streuung von Twisted Light an Elektronen wird untersucht. Dabei ist das Ziel, die Winkelverteilung der gestreuten Lichts durch die gezielte Wahl von Strahlparametern wie der topologischen Ladung und dem Öffnungswinkel zu manipulieren. Es wird gezeigt, dass die Winkelverteilung insbesondere bei der Verwendung einer Superposition zweier Bessel-Strahlen, deren topologische Ladungen eine Differenz von 1 oder 2 aufweisen, in einem gewissen Maße beeinflusst werden kann, sodass gewisse Streurichtungen bevorzugt werden. Zudem wird die Polarisation der gestreuten Strahlung analysiert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Der Bahndrehimpuls des Lichtes . . . . .	1
1.2	Bessel-Strahlen . . . . .	2
1.2.1	Parameter und Eigenschaften . . . . .	2
1.2.2	Entwicklung des skalaren Bessel-Strahls nach ebenen Wellen . . . . .	2
1.3	Thomson-Streuung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Formalismus</b>	<b>5</b>
2.1	Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Photonen . . . . .	5
2.2	Störungstheoretische Beschreibung des Streuprozesses . . . . .	6
2.3	Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes und der Stokes-Parameter	7
2.3.1	Fermis Goldene Regel . . . . .	7
2.3.2	Der Wirkungsquerschnitt und die Normierung der Wellenfunktionen . .	8
2.3.3	Dichtematrix und Stokes-Parameter der gestreuten Strahlung . . . . .	9
2.4	Beschreibung von Polarisationszuständen des Lichts . . . . .	11
2.5	Eigenschaften und Beschreibung von Bessel-Strahlen . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Thomson-Streuung für den Fall ebener Wellen</b>	<b>17</b>
3.1	Das Übergangsmatrixelement . . . . .	17
3.2	Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts . . . . .	18
3.3	Stokes-Parameter des gestreuten Lichts . . . . .	20
3.4	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Streuung eines Bessel-Strahls an einer ebenen Elektronenwelle</b>	<b>23</b>
4.1	Das Übergangsmatrixelement für Bessel-Strahlen . . . . .	23
4.2	Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts . . . . .	23
4.3	Berechnung der Stokes-Parameter . . . . .	26
4.4	Einfluss der Parameter des Bessel-Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation .	27
4.4.1	Einfluss der Helizität $\Lambda$ . . . . .	27
4.4.2	Einfluss des Öffnungswinkels $\theta_k$ . . . . .	27

## Inhaltsverzeichnis

<b>5</b>	<b>Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel <math>\theta_k</math></b>	<b>33</b>
5.1	Beschreibung der Superposition . . . . .	33
5.2	Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts . . . . .	34
5.3	Berechnung der Stokes-Parameter . . . . .	37
5.4	Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation . . . . .	39
5.4.1	Winkelverteilung bei festem Azimutalwinkel $\varphi$ . . . . .	39
5.4.2	Winkelverteilung bei festem Streuwinkel $\theta$ . . . . .	44
5.4.3	Polarisation der gestreuten Strahlung . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Schlussfolgerungen und Ausblick</b>	<b>51</b>
	<b>Anhang</b>	<b>53</b>
A.1	Verwendete Symbole/Konventionen . . . . .	53
A.2	Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes . . . . .	53
A.3	Berechnung der Ortswellenfunktion eines Bessel-Strahls . . . . .	56
A.4	Lösung des Integrals aus Abschnitt 5.2 . . . . .	57
	<b>Literatur</b>	<b>59</b>

# 1 Einführung

Wie ein kürzlich veröffentlichter Artikel von Seipt, Surzhykov und Fritzsche [1] zeigt, lässt sich bei inverser Compton-Streuung von Photonen an sogenannten *Twisted Electrons* – d. h. Elektronen, die eine Bahndrehimpulsprojektion auf die Strahlachse besitzen und somit einen sogenannten *Vortex-Strahl* bilden – die Winkelverteilung der gestreuten Röntgenphotonen effektiv beeinflussen, insbesondere bei Superposition zweier solcher Strahlen mit unterschiedlicher Bahndrehimpulsprojektion  $m$ .

Ein solcher Vortex-Strahl aus hochenergetischen Elektronen ließ sich bis jetzt jedoch nicht experimentell realisieren. Deutlich einfacher ist die Erzeugung von sogenanntem *Twisted Light*, also Photonen, die ebenfalls einen solchen Vortex-Strahl bilden.

Daher soll in dieser Arbeit untersucht werden, inwiefern eine gezielte Manipulation der Winkelverteilung des gestreuten Lichtes bei Thomson-Streuung – dem Grenzfall der Compton-Streuung für niedrige Photonenenergien – durch die Verwendung von *Twisted Light* möglich ist. Zusätzlich zur Winkelverteilung wird die Polarisation der gestreuten Strahlung in Abhängigkeit der Parameter des Photonen-Vortex-Strahls untersucht. Das Ziel ist dabei, optimale Parameter für eine Kontrolle der Winkelverteilung zu bestimmen.

## 1.1 Der Bahndrehimpuls des Lichtes

Der Zusammenhang zwischen der zirkularen Polarisation eines Lichtstrahles und dem Photonen-spin ist seit langem bekannt. Dass ein Photon neben seinem Spin auch eine Bahndrehimpulsprojektion auf die Strahlachse aufweisen kann, der mit einer spiralförmigen Phasenstruktur einhergeht, wurde zuerst 1992 von Allen *et al.* [2] anhand von Laguerre-Gauß-Lasermodeen gezeigt. Für solche Lichtstrahlen, die eine von Null verschiedene Projektion des Bahndrehimpulses auf die Strahlachse besitzen, hat sich der Begriff *Twisted Light* durchgesetzt. Einen guten Einstieg in die Thematik bieten Yao und Padgett [3].

Wie oben erwähnt, ist der Bahndrehimpuls des Lichtes durch seine räumliche Phasenstruktur gegeben. Eine azimuthale Phasenstruktur von  $e^{im\varphi}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) um die Ausbreitungsrichtung entspricht dabei einer Bahndrehimpulsprojektion von  $m\hbar$  pro Photon. Auf der Strahlachse ergibt sich dabei für  $m \neq 0$  stets eine Phasensingularität, die Intensität verschwindet dort. Die Flächen gleicher Phase bilden in diesem Fall keine Ebenen, sondern spiralförmige Strukturen. Die Zahl  $m$  wird als *topologische Ladung* bezeichnet.

## 1 Einführung

Neben Laguerre-Gauß-Strahlen existieren noch weitere Strahlarten, die einen Bahndrehimpuls aufweisen können. Besonders interessant sind dabei sogenannte *Bessel-Strahlen*, da sie Eigenschaften aufweisen, die für viele Anwendungen in der Atomphysik nützlich sind, z. B. für optische Pinzetten [4].

### 1.2 Bessel-Strahlen

Bessel-Strahlen wurden zuerst 1987 von Durnin, Miceli und Eberly [5] als eine Lösung der Helmholtzgleichung

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(r_\perp) = 0 \quad (1.1)$$

beschrieben, die ohne Beugung propagiert, also ihre Form nicht ändert. Bei ihnen handelt es sich um Strahlen, deren Amplitude in radialer Richtung einer Besselfunktion erster Art entspricht, in Zylinderkoordinaten  $(r_\perp, \varphi, z)$  bei einer Ausbreitung in  $z$ -Richtung gemäß<sup>1</sup> [6, 7]

$$\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} J_m(\kappa r_\perp) \exp(im\varphi + ik_z z). \quad (1.2)$$

Dabei ist  $k_z$  der longitudinale Anteil des Wellenvektors und  $\kappa$  der transversale, es gilt dementsprechend

$$\sqrt{k_z^2 + \kappa^2} = k. \quad (1.3)$$

Ideale Bessel-Strahlen besitzen (ähnlich einer ebenen Welle) eine unendliche laterale Ausdehnung und unendliche Energie, daher sind sie ein rein theoretisches Konstrukt. Gute Näherungen an Bessel-Strahlen, sogenannte *Bessel-Gauß-Strahlen* [8], lassen sich jedoch in der Praxis leicht produzieren, z. B. aus Gauß- bzw. Laguerre-Gauß-Strahlen mittels eines *Axicons* [9, 10].

#### 1.2.1 Parameter und Eigenschaften

Die topologische Ladung und die transversale Komponente des Wellenvektors bestimmen maßgeblich die Gestalt des Strahls: Die topologische Ladung  $m$  bestimmt die Ordnung der Bessel-Funktion und somit das grundlegende Profil des Strahls, während die transversale Komponente  $\kappa$  des Wellenvektors die Skalierung der Bessel-Funktion festlegt: Größere Werte von  $\kappa$  führen zu schmaleren Profilen des Bessel-Strahls.

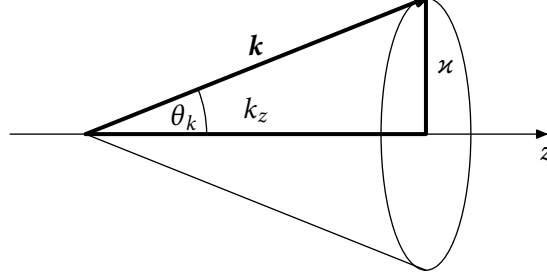
#### 1.2.2 Entwicklung des skalaren Bessel-Strahls nach ebenen Wellen

Die Wellenfunktion des skalaren Bessel-Strahls kann als Superposition skalarer ebener Wellen  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  mit verschiedenen Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  beschrieben werden. Da der transversale und der longi-

---

<sup>1</sup>Die von mir für die Berechnungen verwendete Normierung der Wellenfunktion weicht von der hier angeführten geringfügig ab und wird in Unterabschnitt 2.3.2 erläutert.

itudinale Anteil des Wellenvektors betragsmäßig konstant sind, liegen diese Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  auf einem Kegel mit dem Öffnungswinkel  $\theta_k = \arctan(\kappa/k_z)$ . Dies ist in Abbildung 1.1 skizziert.



**Abbildung 1.1:** Kegel der Wellenvektoren  $\mathbf{k}$ , die einen Bessel-Strahl bilden.

Die Wellenfunktion (1.2) lässt sich folgendermaßen als Superposition skalarer ebener Wellen darstellen [7, 11, 12]:

$$\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.4)$$

mit  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z$  und den Amplituden

$$a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) = \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} (-i)^m e^{im\varphi_k} \delta(k_\perp - \kappa). \quad (1.5)$$

Dabei ist  $\varphi_k$  der Azimutalwinkel im  $\mathbf{k}$ -Raum, d. h.  $\mathbf{k}_\perp = k_\perp \cos \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_x + k_\perp \sin \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_y$ . Durch den Öffnungswinkel  $\theta_k$  ausgedrückt lauten die Wellenvektoren also

$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin \theta_k \cos \varphi_k \\ \sin \theta_k \sin \varphi_k \\ \cos \theta_k \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Als rein skalare Beschreibung berücksichtigt die obige Entwicklung nicht den Spin, also die Polarisation des Bessel-Strahls. Die vektorielle Beschreibung der Entwicklung nach ebenen Wellen ist essentiell für die vorgenommenen Betrachtungen und wird in Abschnitt 2.5 beschrieben.

### 1.3 Thomson-Streuung

Als Thomson-Streuung bezeichnet man die elastische Streuung eines Photons an einem freien, nichtrelativistischen Elektron (oder allgemeiner an einem beliebigen freien, nichtrelativistischen, geladenen Teilchen), d. h. es findet kein Impulsübertrag auf das Elektron statt und das Photon hat nach der Streuung die gleiche Wellenlänge  $\omega$  wie vor der Streuung.

Die Thomson-Streuung stellt den Grenzfall der Compton-Streuung für niedrige Photonenenergien dar. „Niedrig“ bedeutet in diesem Fall, dass die Photonenenergie klein gegenüber der

## 1 Einführung

Elektronenmasse ist,  $\hbar\omega \ll m_e c^2$ . Da die Ruheenergie des Elektrons ca. 511 keV beträgt, ist dies für Photonen im sichtbaren Wellenlängenbereich (Größenordnung 1 eV) in guter Näherung erfüllt.

Gleichfalls kann die Thomson-Streuung auch im Rahmen der klassischen Elektrodynamik beschrieben werden, wie dies z. B. im Lehrbuch von Jackson [13] geschieht: Durch das das Strahlungsfeld wird das Elektron zu Schwingungen angeregt, worauf es selbst Strahlung in Form einer elektromagnetischen Welle der gleichen Frequenz aussendet. Diese klassische Beschreibung ist äquivalent zum Grenzfall niedriger Strahlungsintensität bei der Compton-Streuung an einem nichtrelativistischen Elektron.

In der vorliegenden Arbeit wird die Thomson-Streuung als Prozess in zweiter Ordnung Störungstheorie betrachtet, dies ist in Abschnitt 2.2 näher beschrieben.



## 2 Formalismus

In diesem Kapitel werden die Methoden erläutert, die bei den Berechnungen zum Einsatz kommen.<sup>1</sup> Es wird ein nichtrelativistischer Formalismus verwendet. Da die Streuung im Ruhesystem des Elektrons betrachtet wird, ist das so erhaltene Ergebnis exakt.

Die Basis der Betrachtungen bildet die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes. Diese ist in vielen Lehrbüchern, z. B. bei Greiner [14] oder Sakurai [15], teils ausführlich beschrieben. Nur der Vollständigkeit halber ist die Herleitung in Abschnitt A.2 im Anhang kurz zusammengefasst. Das Ergebnis der Herleitung ist der Operator für das quantisierte Vektorpotential:

$$\check{A}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \sum_{\sigma} [\hat{\epsilon}_{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}) \check{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{\epsilon}_{\sigma}^*(\hat{\mathbf{k}}) \check{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] . \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{k}$  einen Wellenvektor,  $\epsilon_{\sigma}(\hat{\mathbf{k}})$  einen auf diesem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  senkrecht stehenden Polarisationsvektor zu einem Polarisationszustand  $\sigma$  (die Beschreibung von Polarisationszuständen ist in Abschnitt 2.4 erläutert) und  $\check{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})$  bzw.  $\check{a}_{\sigma}(\mathbf{k})$  sind die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für ein Photon mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und dem Polarisationszustand  $\sigma$ .

Ein Zustand des Strahlungsfeldes, der ein einzelnes Photon (eine ebene Welle) mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und dem Polarisationszustand  $\sigma$  beschreibt, wird im Folgenden mit  $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$  bezeichnet. Dabei wird ein solcher Einphotonenzustand mittels des entsprechenden Erzeugungsoperators aus dem Vakuumzustand  $|0\rangle$  erzeugt:

$$|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \check{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})|0\rangle . \quad (2.2)$$

### 2.1 Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Photonen

Um die Wechselwirkung eines freien Elektrons mit einem elektromagnetischen Feld zu beschreiben, wird das Prinzip der minimalen Kopplung verwendet. Dabei wird der Impulsoperator gemäß

$$\check{\mathbf{p}} \rightarrow \check{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \check{A}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Einige der verwendeten Symbole bzw. Schreibweisen sind in Abschnitt A.1 im Anhang beschrieben.

## 2 Formalismus

ersetzt. Damit ergibt sich der Hamiltonoperator des Elektrons zu

$$\begin{aligned}\check{H} &= \frac{(\check{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{c}\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))^2}{2m_e} \\ &= \underbrace{\frac{\check{\mathbf{p}}^2}{2m_e}}_{=\check{H}_0} - \underbrace{\frac{e}{m_e c}\check{\mathbf{p}} \cdot \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \frac{e^2}{2m_e c^2}\check{\mathbf{A}}^2(\mathbf{x})}_{=\check{H}_{\text{int}}} .\end{aligned}\quad (2.4)$$

Man erhält zwei Terme: den freien Hamiltonian  $\check{H}_0$ , welcher die freie Propagation des Elektrons beschreibt und ebene Wellen als Lösungen besitzt, und einen Wechselwirkungsterm  $\check{H}_{\text{int}}$ , der die Wechselwirkung des Elektrons mit dem quantisierten Strahlungsfeld beschreibt. Der Wechselwirkungs-Hamiltonian lässt sich in zwei Summanden aufteilen: einen Term proportional zu  $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$  und einen proportional zu  $\check{\mathbf{A}}^2(\mathbf{x})$ . Diese werden im Folgenden mit  $\check{H}'_{\text{int}}$  und  $\check{H}''_{\text{int}}$  bezeichnet:

$$\check{H}_{\text{int}} = \underbrace{-\frac{e}{m_e c}\check{\mathbf{p}} \cdot \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})}_{=\check{H}'_{\text{int}}} + \underbrace{\frac{e^2}{2m_e c^2}\check{\mathbf{A}}^2(\mathbf{x})}_{=\check{H}''_{\text{int}}} .\quad (2.5)$$

Einsetzen des quantisierten Vektorpotentials (2.1) liefert

$$\check{H}'_{\text{int}} = -\frac{e}{2\pi m_e c} \int d^3\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \sum_{\sigma} \check{\mathbf{p}} \cdot [\hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}) \check{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\hat{\mathbf{k}}) \check{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] \quad (2.6)$$

und

$$\begin{aligned}\check{H}''_{\text{int}} &= \frac{e^2 \hbar}{8\pi^2 m_e c} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \frac{1}{\sqrt{k k'}} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \\ &\quad \left[ \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}(\hat{\mathbf{k}}') \check{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) \check{a}_{\sigma'}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\hat{\mathbf{k}}') \check{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) \check{a}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}(\hat{\mathbf{k}}') \check{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \check{a}_{\sigma'}(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\hat{\mathbf{k}}') \check{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \check{a}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right] .\end{aligned}\quad (2.7)$$

## 2.2 Störungstheoretische Beschreibung des Streuprozesses

Der Prozess der Thomson-Streuung wird im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie beschrieben, konkret in Störungstheorie zweiter Ordnung in der Ladung  $e$ . Das ungestörte System ist durch den freien Hamiltonian  $\check{H}_0$  gegeben, dessen Lösungen ebene Wellen (charakterisiert durch einen Wellenvektor  $\mathbf{q} = \mathbf{p}/\hbar$ ) sind, die Störung durch den Wechselwirkungs-Hamiltonian  $\check{H}_{\text{int}}$ . Basierend darauf kann man das Übergangsmatrixelement für den Streuprozess aufstellen, was die Basis für die weiteren Berechnungen bildet.

### 2.3 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes und der Stokes-Parameter

Bei der störungstheoretischen Beschreibung muss beachtet werden, dass alle Störungsterme konsistent zur selben Ordnung betrachtet werden: Der Term  $\check{H}_{\text{int}}''$  ist proportional zu  $e^2$ , der Term  $\check{H}_{\text{int}}'$  jedoch nur zu  $e$ , folglich müsste er in zweiter Ordnung betrachtet werden. Durch die Beschreibung des Prozesses im Ruhesystem des Elektrons kann darauf aber verzichtet werden, da in diesem Fall  $\mathbf{p} = 0$  gilt und der Operator  $\check{H}_{\text{int}}' = -\frac{e}{m_e c} \check{\mathbf{p}} \cdot \check{\mathbf{A}}$  damit verschwindet.

Das Übergangsmatrixelement  $M_{fi}$  für einen Anfangszustand  $|i\rangle$  und einen Endzustand  $|f\rangle$  ist dann durch

$$M_{fi} = \langle f | \check{H}_{\text{int}}'' | i \rangle \quad (2.8)$$

gegeben. Im Fall ebener Photonenwellen sind die Zustände  $|i\rangle$  und  $|f\rangle$  dabei jeweils durch den Wellenvektor des Elektrons ( $\mathbf{q}$ ) und des Photons ( $\mathbf{k}$ ) sowie den Polarisationszustand  $\sigma$  des Photons charakterisiert,

$$|i\rangle = |\mathbf{q}_i; \mathbf{k}_i, \sigma_i\rangle, \quad |f\rangle = |\mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f\rangle. \quad (2.9)$$

Für Twisted Light ersetzt man entsprechend den Zustand  $|i\rangle$  in passender Weise, wodurch man ein anderes Matrixelement erhält. Dieses macht dann den Unterschied zwischen ebenen Wellen und Bessel-Strahlen aus. Wie die Zustände  $|i\rangle$  für die verschiedenen Szenarien lauten, ist am Anfang der jeweiligen Kapitel beschrieben.

## 2.3 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes und der Stokes-Parameter

Die Winkelverteilung der gestreuten Photonen wird durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  charakterisiert, der vom Raumwinkel  $\Omega$  abhängt, in welchen das jeweilige Photon gestreut wird. Zur Charakterisierung der Polarisation der gestreuten Photonen werden die Stokes-Parameter berechnet.

### 2.3.1 Fermis Goldene Regel

Die Übergangsrate  $\dot{P} = dP/dt$ , also die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit, für den Übergang von einem Anfangs- in einen Endzustand unter einer Störung wird durch Fermis Goldene Regel beschrieben [14]:

$$\dot{P} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet  $\sum_f$  die Summation/Integration über alle betrachteten Endzustände, hier also die Summation über zwei orthogonale Polarisationszustände  $\sigma_f$  des Photons und Integration über

die finalen Wellenvektoren  $\mathbf{k}_f$  und  $\mathbf{q}_f$  von Photon und Elektron:

$$\mathcal{Z}_f = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3 \mathbf{q}_f \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} . \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Der Wirkungsquerschnitt und die Normierung der Wellenfunktionen

Nach dem Lehrbuch von Landau und Lifschitz [16] ist der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}}$  so definiert, dass das Differential der Übergangswahrscheinlichkeit

$$dP = \sigma_{\text{tot}} v_{12} n_1 n_2 dV dt \quad (2.12)$$

ist. Dabei sind  $n_1$  und  $n_2$  die Teilchendichten der an der Streuung beteiligten Teilchen im Anfangszustand. Da es sich dabei um ein Elektron und ein Photon handelt, werden diese im folgenden mit  $n_{\text{el}}$  bzw.  $n_{\text{ph}}$  bezeichnet. Die Teilchendichte  $n_i(\mathbf{x})$  berechnet sich aus der Ortswellenfunktion  $\psi_i(\mathbf{x})$  gemäß

$$n_i(\mathbf{x}) = \psi_i^*(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Die Größe  $v_{12}$  bezeichnet die Relativgeschwindigkeit der beiden an der Streuung beteiligten Teilchen, für die Streuung eines Photons gilt daher stets  $v_{12} = c$ . Nach zeitlicher Ableitung erhält man

$$d\dot{P} = \sigma_{\text{tot}} c n_{\text{el}} n_{\text{ph}} dV . \quad (2.14)$$

Über das Volumenelement  $dV$ , in dem die Streuung stattfindet, wird integriert, sodass man schließlich

$$\dot{P} = \sigma_{\text{tot}} c \int dV n_{\text{el}} n_{\text{ph}} \quad (2.15)$$

erhält. Sofern  $n_{\text{el}}$  und  $n_{\text{ph}}$  im Volumen  $V$  konstant sind, erhält man dann den totalen Wirkungsquerschnitt zu

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\dot{P}}{n_{\text{el}} n_{\text{ph}} c V} \quad (2.16)$$

bzw. den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  durch Ableiten nach dem Raumwinkel  $\Omega$ , in welchen das Photon gestreut wird:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n_{\text{el}} n_{\text{ph}} c V} \frac{d\dot{P}}{d\Omega} . \quad (2.17)$$

Im Gegensatz zu ebenen Wellen ist die Teilchendichte  $n_{\text{ph}}$  eines Bessel-Strahls nicht konstant:

$$|\psi_{\text{ph}}^{(\text{pw})}| = \text{const.}, \quad \text{aber} \quad |\psi_{\text{ph}}^{(\text{tw})}| \propto J_m^2(\kappa r_{\perp}) \neq \text{const.} \quad (2.18)$$

### 2.3 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes und der Stokes-Parameter

In der Literatur [11] wurde diesbezüglich vorgeschlagen, einen gemittelten Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{av}}$  einzuführen: Durch Integration über die räumlich veränderliche Teilchendichte erhält man

$$\sigma_{\text{av}} = \frac{\dot{P}}{n_{\text{el}} \langle n_{\text{ph}} \rangle c V} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n_{\text{el}} \langle n_{\text{ph}} \rangle c V} \frac{d\dot{P}}{d\Omega} \quad (2.19)$$

mit der gemittelten Teilchendichte

$$\langle n_{\text{ph}} \rangle = \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x} n_{\text{ph}}(\mathbf{x}). \quad (2.20)$$

Diese Definition eines gemittelten Wirkungsquerschnitts wird bei den in Kapitel 4 und 5 durchgeführten Berechnungen verwendet.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist generell unabhängig von der Normierung der Zustände. Es ist jedoch zu beachten, dass die Normierung der zur Berechnung der Teilchendichte verwendeten Ortswellenfunktion  $\psi_{\text{ph}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}, \sigma \rangle$  für das einlaufende Photon derjenigen des entsprechenden Besetzungszustandes  $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$  entspricht. Nur wenn man beide Normierungen konsistent wählt, kürzen sich alle Normierungsfaktoren. Deshalb wählt man nach Greiner [14] für die normierte Ortswellenfunktion einer ebenen Welle in einem (unendlichen) Volumen  $V = L^3$  die Form

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}, \sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.21)$$

Diese Normierung bewirkt, dass die Teilchendichte für ein solches Photon

$$n_{\text{ph}} = \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \quad (2.22)$$

beträgt, was genau einem Photon im Volumen  $V$  entspricht. Für das Elektron, welches ebenfalls als ebene Welle beschrieben wird, wähle ich die gleiche Normierung. Die Berechnung der korrekt normierten Ortswellenfunktion für einen Bessel-Strahl ist in Abschnitt 2.5 beschrieben.

#### 2.3.3 Dichtematrix und Stokes-Parameter der gestreuten Strahlung

Der Polarisationszustand einer elektromagnetischen Welle lässt sich allgemein mittels einer Dichtematrix  $\rho$  oder den Stokes-Parametern  $I$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , und  $P_3$  beschreiben. Beide Varianten enthalten äquivalente Informationen.

Bei der Dichtematrix handelt es sich um eine komplexe  $(2 \times 2)$ -Matrix. Sie bezieht sich stets auf eine bestimmte Basis aus zwei orthogonalen Polarisationszuständen  $\sigma$  und  $\sigma'$  (z. B. links- und rechtshändig zirkular polarisiert), im Folgenden durch die komplexen Polarisationsvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_{\sigma}$  und  $\hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}$  repräsentiert. Aus den Komponenten des Vektors der elektrischen Feldstärke  $\mathcal{E}$  in dieser Basis,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\sigma} + \mathcal{E}_{\sigma'} \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}, \quad (2.23)$$

## 2 Formalismus

ergeben sich die Elemente der Dichtematrix zu dieser Basis als

$$\rho_{\sigma\sigma'} := \frac{\mathcal{E}_\sigma \mathcal{E}_{\sigma'}^*}{|\mathcal{E}_\sigma|^2 + |\mathcal{E}_{\sigma'}|^2}. \quad (2.24)$$

Wie leicht ersichtlich ist, gilt nach obiger Definition  $\text{tr } \boldsymbol{\rho} = 1$ .

Ist  $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$ , so spricht man von einem reinen Zustand. Die Strahlung ist in diesem Fall vollständig polarisiert [17, S. 10].

Die Stokes-Parameter beschreiben die Polarisation im Bezug auf eine Referenzebene. Diese wird so festgelegt, dass die Ausbreitungsrichtung des Strahls in dieser Ebene liegt. Üblicherweise wählt man die Streuebene, sodass man die gleiche Ebene für die einfallende und die gestreute Strahlung verwenden kann. Anschließend zerlegt man den (komplexwertigen) Vektor der elektrischen Feldstärke in seine parallel und senkrecht zu dieser Referenzebene polarisierten Anteile,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_\parallel \hat{\mathbf{e}}_\parallel + \mathcal{E}_\perp \hat{\mathbf{e}}_\perp. \quad (2.25)$$

Die Stokes-Parameter sind dann folgendermaßen definiert [17, S. 5]:

$$I = |\mathcal{E}_\parallel|^2 + |\mathcal{E}_\perp|^2, \quad (2.26)$$

$$P_1 = |\mathcal{E}_\parallel|^2 - |\mathcal{E}_\perp|^2, \quad (2.27)$$

$$P_2 = -2 \text{Re}(\mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}_\perp^*), \quad (2.28)$$

$$P_3 = -2 \text{Im}(\mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}_\perp^*). \quad (2.29)$$

Der erste Parameter stellt die Intensität  $I = |\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2$  des Strahls dar. Oft werden die Stokes-Parameter auf diese Größe normiert:

$$\tilde{P}_i = P_i/I, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.30)$$

Der Polarisationsgrad  $\Pi$  gibt an, wie groß der Anteil polarisierter Strahlung ist. Dabei entspricht  $\Pi = 1$  vollständig polarisierter Strahlung. Der Polarisationsgrad berechnet sich aus den Stokes-Parametern nach

$$\Pi = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}}{I} = \sqrt{\tilde{P}_1^2 + \tilde{P}_2^2 + \tilde{P}_3^2}. \quad (2.31)$$

Die normierten Stokes-Parameter  $\tilde{P}_i$  können mit der Dichtematrix in Zusammenhang gebracht werden. Betrachtet man die Dichtematrix zur selben Basis  $\{\hat{\mathbf{e}}_\parallel, \hat{\mathbf{e}}_\perp\}$ , bezüglich der man die Stokes-Parameter definiert hat, so erhält man den Zusammenhang [17, S. 10]

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{I} \begin{pmatrix} |\mathcal{E}_\parallel|^2 & \mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}_\perp^* \\ \mathcal{E}_\perp \mathcal{E}_\parallel^* & |\mathcal{E}_\perp|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tilde{P}_1 & -\tilde{P}_2 - i\tilde{P}_3 \\ -\tilde{P}_2 + i\tilde{P}_3 & 1 - \tilde{P}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

## 2.4 Beschreibung von Polarisationszuständen des Lichts

Somit kann man aus den Elementen der Dichtematrix die Stokes-Parameter wie folgt berechnen:

$$\tilde{P}_1 = \rho_{\parallel\parallel} - \rho_{\perp\perp}, \quad \tilde{P}_2 = -\rho_{\parallel\perp} - \rho_{\perp\parallel}, \quad \tilde{P}_3 = i \cdot (\rho_{\parallel\perp} - \rho_{\perp\parallel}). \quad (2.33)$$

Um die Elemente der Dichtematrix für das gestreute Photon zu ermitteln, wird bei der Berechnung der Übergangsrate  $\dot{P}$  auf die Summation der beiden orthogonalen Polarisationszustände verzichtet, stattdessen werden in der folgenden Formel für  $\sigma$  und  $\sigma'$  die zuvor festgelegten Polarisationszustände (parallel/senkrecht zur Streuebene) eingesetzt.

$$\dot{P}_{\sigma\sigma'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^6 \int d^3\mathbf{q}_f \int d^3\mathbf{k}_f M_{fi}(\sigma) M_{fi}^*(\sigma') \delta(E_f - E_i). \quad (2.34)$$

Dabei ist

$$M_{fi}(\sigma) = \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma | \check{H}_{\text{int}} | i \rangle, \quad (2.35)$$

Die Elemente der Dichtematrix erhält man dann als

$$\rho_{ij} = \frac{\dot{P}_{ij}}{\dot{P}_{ii} + \dot{P}_{jj}}. \quad (2.36)$$

Konstante Vorfaktoren der Übergangsrate können hier vernachlässigt werden, da sie sich bei der Berechnung herauskürzen und die Dichtematrix durch die Berechnungsvorschrift automatisch auf 1 normiert ist. Aus diesem Grund genügt es auch, mit der Übergangsrate zu rechnen (anstatt mit dem Wirkungsquerschnitt), da die Teilchendichten nicht vom Polarisationszustand abhängen und nur einen konstanten Faktor liefern.

## 2.4 Beschreibung von Polarisationszuständen des Lichts

Die Beschreibung des Polarisationszustandes  $\sigma$  einer elektromagnetischen Welle kann durch einen Jones-Vektor  $\mathbf{J}_\sigma$  geschehen. Dabei handelt es sich um einen komplexwertigen Vektor mit zwei Einträgen, die allgemein die Anteile der Polarisation parallel ( $\varepsilon_{\parallel}$ ) und senkrecht ( $\varepsilon_{\perp}$ ) zu einer Referenzebene beschreiben. Diese Referenzebene muss so gewählt werden, dass der Vektor  $\mathbf{k}$  darin liegt. Oft wählt man hierfür die  $x$ - $z$ -Ebene, wenn sich das Photon in  $z$ -Richtung fortbewegt. Die Jones-Vektoren werden so normiert, dass  $|\mathbf{J}_\sigma|^2 = 1$  ist.

Die dreidimensionalen Polarisationsvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k})$  beschreiben ebenfalls den Polarisationszustand, sind aber von der Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  abhängig. Sie stehen aufgrund der Coulomb-Eichung stets senkrecht auf dem Wellenvektor, d. h.  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ . Für ein Photon mit der Ausbreitungsrichtung  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_z$  wähle ich die  $x$ - $z$ -Ebene als Referenzebene; so entsprechen die Komponenten des Jones-Vektors  $\mathbf{J}_\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}$  gerade den ersten beiden Komponenten des Polarisationsvektors  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\hat{\mathbf{k}})$ ,

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\hat{\mathbf{e}}_z) = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0)^\top. \quad (2.37)$$

## 2 Formalismus

Für die Beschreibung eines allgemeinen Polarisationsvektors in  $\hat{\mathbf{k}}$ -Richtung als Funktion des Jones-Vektors

$$\mathbf{J}_\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} \\ \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

wähle ich die Referenzebene, die von  $\hat{\mathbf{k}}$  und  $\hat{\mathbf{e}}_z$  aufgespannt wird. Für den Fall, dass  $\hat{\mathbf{k}}_i = \hat{\mathbf{e}}_z$  (einfallendes Photon) und  $\hat{\mathbf{k}}_f = \hat{\mathbf{k}}$  (gestreutes Photon) ist, entspricht das der Streuebene (der Ebene, die von ein- und ausfallendem Strahl aufgespannt wird). Im Fall  $\hat{\mathbf{k}} = \pm \hat{\mathbf{e}}_z$  wähle ich wieder die  $x$ - $z$ -Ebene. Dann ergibt sich der Polarisationsvektor  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\hat{\mathbf{k}})$  in sphärischen Koordinaten  $\hat{\mathbf{k}} = (\theta, \varphi)$  durch entsprechende Drehung (zuerst um den Polarwinkel  $\theta$  um die  $y$ -Achse, anschließend um den Azimutalwinkel  $\varphi$  um die  $z$ -Achse):

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} \\ \varepsilon_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} \cos \theta \cos \varphi - \varepsilon_{\perp} \sin \varphi \\ \varepsilon_{\parallel} \cos \theta \sin \varphi + \varepsilon_{\perp} \cos \varphi \\ -\varepsilon_{\parallel} \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Den Polarisationsvektor für einen bestimmten Polarisationszustand erhält man nun durch Einsetzen entsprechender Werte für  $\varepsilon_{\parallel}$  und  $\varepsilon_{\perp}$ , also eines entsprechenden Jones-Vektors. Zum Beispiel gilt für lineare Polarisation parallel zur Referenzebene  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , senkrecht zur Referenzebene  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Der Zustand der zirkularen Polarisation wird durch die sogenannte *Helizität*  $\Lambda = \pm 1$  charakterisiert. Dabei steht  $\Lambda = 1$  für rechtshändig und  $\Lambda = -1$  für linkshändig zirkuläre Polarisation. Der entsprechende Jones-Vektor lautet  $\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\Lambda \end{pmatrix}$ . Es ist zu beachten, dass auf dem Gebiet der Optik die umgekehrte Definition üblich ist (dort steht  $\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  für linkshändig zirkuläre Polarisation), da man dort die entgegengesetzt der Ausbreitungsrichtung des Strahls schaut, während die Helizität als Projektion des Photonenspins auf die Strahlachse definiert ist. Ich bezeichne im Folgenden stets  $\Lambda = 1$  als rechtshändig zirkuläre Polarisation.

## 2.5 Eigenschaften und Beschreibung von Bessel-Strahlen

Nachdem der skalare Bessel-Strahl in Kapitel 1 schon kurz beschrieben wurde, soll an dieser Stelle eine ausführlichere Betrachtung in Hinblick auf den vektoriellen Formalismus, der einen Bessel-Strahl mit Spin- und Bahndrehimpulsprojektion beschreibt, erfolgen. Die Strahlachse sei dabei stets die  $z$ -Achse.

Das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  für ein *Twisted Photon* erfüllt die Helmholtzgleichung

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.40)$$



## 2.5 Eigenschaften und Beschreibung von Bessel-Strahlen

Dies ist sowohl für ebene Wellen als auch für Twisted Light gegeben. Von einem Vektorpotential, welches einen Vortex-Strahl beschreibt, fordern wir weitere Bedingungen, die bei Matula *et al.* [7] ausführlicher beschrieben sind und hier kurz zusammengefasst werden sollen:

Das Vektorpotential soll eine Eigenfunktion der  $z$ -Komponente  $\check{p}_z = -i\frac{\partial}{\partial z}$  des Impulsoperators sein,

$$\check{p}_z \mathbf{A}(\mathbf{x}) = k_z \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (2.41)$$

sowie eine Eigenfunktion der  $z$ -Komponente des Gesamtdrehimpulsoperators  $\check{J}_z = \check{L}_z + \check{S}_z$ ,

$$\check{J}_z \mathbf{A}(\mathbf{x}) = m_j \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (2.42)$$

Die entsprechenden Operatoren für Bahndrehimpuls und Spin lauten in der Ortsdarstellung

$$\check{L}_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{bzw.} \quad \check{S}_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Analog zur skalaren Betrachtung in Unterabschnitt 1.2.2 lässt sich auch der vektorielle Bessel-Strahl als Superposition ebener Wellen mit der Wellenzahl  $k$  auffassen. Auch diese Wellenvektoren liegen auf einem Kegel: Sie besitzen eine wohldefinierte Komponente  $k_z$  des Wellenvektors in Strahlrichtung (longitudinal). Aufgrund dessen ist auch der Betrag des transversalen Anteils des Wellenvektors auf  $\kappa = |\mathbf{k}_\perp| = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  festgelegt. Die Richtung des transversalen Anteils  $\mathbf{k}_\perp$  ist nicht bestimmt und wird, wie bei der skalaren Betrachtung, durch den Winkel  $\varphi_k$  parametrisiert:  $\mathbf{k}_\perp = \kappa \cos \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_x + \kappa \sin \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_y$ .

Die Normalmoden des elektromagnetischen Feldes sind durch die transversalen ebenen Wellen

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.44)$$

mit  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k}) = 0$  gegeben. Für das Vektorpotential des Bessel-Strahls erhält man also analog zu Gl. (1.4) die Form

$$\mathbf{A}_{\kappa k_z m \sigma}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) \hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.45)$$

mit den selben Entwicklungskoeffizienten  $a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) = \sqrt{2\pi/\kappa} (-i)^m e^{im\varphi_k} \delta(k_\perp - \kappa)$  wie im skalaren Fall. Da für die Polarisationsvektoren die Bedingung  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k}) = 0$  gilt, erfüllt Gl. (2.45) die Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

Im Impulsraum ist  $\check{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ . Die Entwicklungskoeffizienten  $a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp)$  sind Eigenfunktionen von  $\check{L}_z$  zum Eigenwert  $m$ . Daher erfüllt auch der skalare Bessel-Strahl die Eigenwertgleichung

$$\check{L}_z \psi_{\kappa k_z m}(\mathbf{x}) = m \psi_{\kappa k_z m}(\mathbf{x}). \quad (2.46)$$

## 2 Formalismus

Damit das Vektorpotential die Eigenwertgleichung (2.42) erfüllt, müssen die Polarisationszustände  $\sigma$ , die den Spin charakterisieren, näher spezifiziert werden. Für ebene Wellen sind die Eigenfunktionen von  $\check{S}_z$  durch Polarisationsvektoren mit einer wohlbestimmten Helizität  $\Lambda = \pm 1$  gegeben. Die entsprechenden Polarisationsvektoren ergeben sich für einen Wellenvektor  $\mathbf{k}$  wie in Gl. (1.6) aus Gl. (2.39) zu

$$\hat{\mathbf{e}}_\Lambda(\theta_k, \varphi_k) = \frac{-\Lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_k \cos \varphi_k - i\Lambda \sin \varphi_k \\ \cos \theta_k \sin \varphi_k + i\Lambda \cos \varphi_k \\ -\sin \varphi_k \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Mit diesen Polarisationsvektoren ergibt sich das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  für einen Bessel-Strahl mit den geforderten Eigenschaften zu

$$\mathbf{A}_{\kappa k_z m \Lambda}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) \hat{\mathbf{e}}_\Lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.48)$$

Die topologische Ladung  $m$ , welche angibt, wie viele vollständige „Umdrehungen“ die Phase bei Umlauf der Strahlachse vornimmt, entspricht also der Bahndrehimpulsprojektion auf die Strahlachse des Photons in Einheiten von  $\hbar$ , während die Helizität  $\Lambda$  die Spinprojektion auf die Strahlachse beschreibt.

Ein (zirkular polarisiertes) Twisted Photon, dessen Ausbreitungsrichtung mit der  $z$ -Achse übereinstimmt, wird also durch die vier Parameter  $\kappa$ ,  $k_z$ ,  $m$  und  $\Lambda$  charakterisiert. Der entsprechende Hilbertraumzustand, im Folgenden mit  $|\kappa, k_z, m, \Lambda\rangle$  bezeichnet, lässt sich analog zu Gl. (2.48) ebenfalls als Superposition ebener Wellen  $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$  darstellen, also

$$|\kappa, k_z, m, \Lambda\rangle = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) |\mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda\rangle. \quad (2.49)$$

Die normierte Ortswellenfunktion  $\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) = \langle \mathbf{x} | \kappa, k_z, m, \Lambda \rangle$  eines solchen Twisted Photons, wie sie zur Berechnung der Teilchendichte benötigt wird, erhält man aus Gl. (2.49) mittels Einsetzen der Ortswellenfunktion (2.21) für ebene Wellen. In Zylinderkoordinaten  $(r_\perp, \varphi, z)$  erhält man<sup>2</sup>

$$\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} J_m(\kappa r_\perp) e^{im\varphi} e^{ik_z z}. \quad (2.50)$$

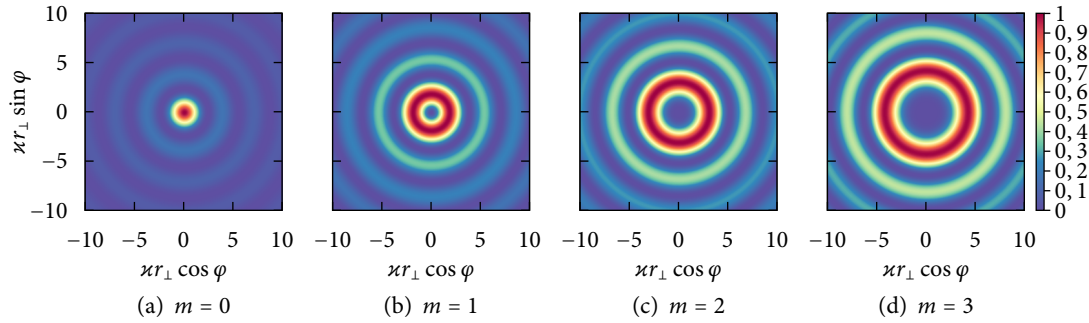
Die Wellenfunktion wird dabei in ein (unendlich großes) zylindrisches Volumen  $V = \pi R^2 L_z$  eingebettet, mit dem Zylinderradius  $R$  und der Zylinderhöhe  $L_z$ . Dies erleichtert die spätere Integration über das Volumen, da die Wellenfunktion in Zylinderkoordinaten gegeben ist. Die Ortswellenfunktion hängt nicht von der Helizität  $\Lambda$  ab.

---

<sup>2</sup>Die ausführliche Berechnung der Ortswellenfunktion ist in Abschnitt A.3 im Anhang angegeben.

## 2.5 Eigenschaften und Beschreibung von Bessel-Strahlen

In Abbildung 2.1 sind die transversalen Intensitätsverteilungen für verschiedene Bessel-Strahlen abgebildet. Wie man sieht, verschwindet die Intensität auf der Strahlachse für  $m \neq 0$ .



**Abbildung 2.1:** Transversale Intensitätsverteilungen (jeweils so normiert, dass das Maximum der Verteilung 1 ist) für Bessel-Strahlen mit unterschiedlichen topologischen Ladungen  $m$ . Die Intensität eines Strahls ist proportional zur Teilchendichte  $n_{\text{ph}}(\mathbf{x}) = \psi_{\text{ph}}^*(\mathbf{x})\psi_{\text{ph}}(\mathbf{x})$ , im Fall eines Bessel-Strahls also ortsabhängig.



### 3 Thomson-Streuung für den Fall ebener Wellen

In diesem Kapitel wird die Streuung ebener Lichtwellen an freien Elektronen diskutiert. Das Elektron wird dabei ebenfalls als ebene Welle beschrieben. Obwohl die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts recht ausführlich im Lehrbuch von Greiner [14] beschrieben ist, werden im Folgenden einige Details der Rechnung explizit angeführt, um die Vorgehensweise darzulegen, da diese in weiten Teilen mit derjenigen für Twisted Light übereinstimmt. Desweiteren werden in diesem Kapitel die Stokes-Parameter, welche die Polarisationsseigenschaften des gestreuten Lichts beschreiben, berechnet.

Für alle Größen ergeben sich kompakte analytische Ausdrücke, die im Weiteren diskutiert und mit den Resultaten für Twisted Light verglichen werden.

#### 3.1 Das Übergangsmatrixelement

Der Vorgang wird im Ruhesystem des Elektrons betrachtet, also  $\mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{q}_i = 0$ , da gemäß der Betrachtungen in Abschnitt 2.2 so nur der Term  $\check{H}_{\text{int}}''$  betrachtet werden muss. Das Matrixelement lautet also  $M_{fi} = \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \mathbf{k}_i, \sigma_i \rangle$ . Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
 M_{fi} = & \frac{e^2}{2m_e c} \frac{\hbar}{(2\pi)^2} \int d^3 \mathbf{k} \int d^3 \mathbf{k}' \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \frac{1}{\sqrt{k k'}} \\
 & \times \left[ \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_f) \delta_{\sigma \sigma_f} \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta_{\sigma' \sigma_i} \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\hat{\mathbf{k}}) \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{q}_f}^*(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \psi_{\mathbf{q}_i}(\mathbf{x}) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) \delta_{\sigma \sigma_i} \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_f) \delta_{\sigma' \sigma_f} \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\hat{\mathbf{k}}') \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{q}_f}^*(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \psi_{\mathbf{q}_i}(\mathbf{x}) \right].
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nach Integration über  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}'$  erhält man

$$M_{fi} = \frac{e^2}{m_e c} \frac{2\pi \hbar}{V} \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \varepsilon_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{k_i k_f}} \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{q}_f}^*(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{x}} \psi_{\mathbf{q}_i}(\mathbf{x}). \tag{3.2}$$

### 3 Thomson-Streuung für den Fall ebener Wellen

Mit der Wellenfunktionen (2.21) für das Elektron im Anfangs- und Endzustand erhält man für das Integral

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{q}_f}^*(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{x}} \psi_{\mathbf{q}_i}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{L^3} \int d^3 \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \cdot \mathbf{x}} \\ &= \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dies stellt die Impulserhaltung dar. Damit erhält man das Übergangsmatrixelement für ebene Wellen:

$$M_{fi}^{(pw)} = \frac{e^2}{m_e c} \frac{2\pi\hbar}{V} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{k_i k_f}} \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f). \quad (3.4)$$

### 3.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Das Betragsquadrat des Übergangsmatrixelements lautet

$$\left| M_{fi}^{(pw)} \right|^2 = \left[ \frac{e^2}{m_e c} \frac{2\pi\hbar}{V} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \right]^2 \frac{\left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{k}}_i) \right|^2}{k_i k_f} \left[ \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \right]^2. \quad (3.5)$$

Damit erhält man die Übergangsrate nach Fermis goldener Regel (2.10):

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3 \mathbf{q}_f \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} \frac{2\pi}{\hbar} \left| M_{fi}^{(pw)} \right|^2 \delta(E_f - E_i) \\ &= \frac{e^4 \hbar}{m_e^2 c^2} \frac{(2\pi)^3}{V^2} \int d^3 \mathbf{q}_f \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} \frac{\left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{k}}_i) \right|^2}{k_i k_f} \left[ \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \right]^2 \delta(E_f - E_i). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Term  $\delta(E_f - E_i)$  stellt die Energieerhaltung sicher. Der Energieübertrag auf das Elektron wird bei der Thomson-Streuung vernachlässigt, weswegen die Energie des Elektrons im Anfangs- und Endzustand die gleiche ist. Deshalb kann man die Delta-Distribution wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \delta(E_f - E_i) &= \delta \left( \hbar c k_f + \frac{\hbar^2 q_f^2}{2m_e} - \hbar c k_i - \frac{\hbar^2 q_i^2}{2m_e} \right) \\ &= \delta \left( \hbar c (k_f - k_i) + \frac{\hbar^2 (q_f^2 - q_i^2)}{2m_e} \right) \\ &\simeq \delta(\hbar c (k_f - k_i)) \\ &= \frac{1}{\hbar c} \delta(k_f - k_i). \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Das Quadrat der dreidimensionalen Delta-Distribution wird wie folgt interpretiert:

$$\begin{aligned} \left[ \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \right]^2 &= \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \delta^{(3)}(0) \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Somit erhält man die Übergangsrate

$$\dot{P} = \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \frac{1}{V} \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} \frac{\left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{k}}_i) \right|^2}{k_i k_f} \underbrace{\delta(k_f - k_i) \int d^3 \mathbf{q}_f \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f)}_{=1}. \quad (3.9)$$

Die Integration über  $\mathbf{k}_f$  wird in Kugelkoordinaten ausgeführt,  $\int d^3 \mathbf{k}_f = \int dk_f k_f^2 \int d\Omega$  mit dem Raumwinkelement  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Der Einfachheit halber setzen wir  $\mathbf{k}_i = k \hat{\mathbf{e}}_z$ . Damit ist der Polarwinkel  $\theta$  des gestreuten Photons gleichzeitig der Streuwinkel (der Winkel zwischen einfallendem und gestreutem Photon). Nun kann man die Integration über  $k_f$  ausführen:

$$\dot{P} = \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \frac{1}{V} \int d\Omega \sum_{\sigma_f} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{e}}_z) \right|^2 \underbrace{\int dk_f k_f^2 \frac{1}{k_i k_f} \delta(k_f - k_i)}_{=1}. \quad (3.10)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{pw}}{d\Omega} &= \frac{1}{c V n_{el} n_{ph}} \frac{d\dot{P}}{d\Omega} \\ &= \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \frac{1}{V^2 n_{el} n_{ph}} \sum_{\sigma_f} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{e}}_z) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Teilchendichten des Elektrons ( $n_{el}$ ) und des Photons ( $n_{ph}$ ) sind räumlich konstant, da es sich um ebene Wellen handelt:

$$\psi_{el}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}}, \quad n_{el}(\mathbf{x}) = \psi_{el}^*(\mathbf{x}) \psi_{el}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V}, \quad (3.12)$$

$$\psi_{ph}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}}, \quad n_{ph}(\mathbf{x}) = \psi_{ph}^*(\mathbf{x}) \psi_{ph}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V}. \quad (3.13)$$

Damit ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt für ebene Wellen zu

$$\frac{d\sigma_{pw}}{d\Omega} = \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \sum_{\sigma_f} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i}(\hat{\mathbf{e}}_z) \right|^2. \quad (3.14)$$

### 3 Thomson-Streuung für den Fall ebener Wellen

Wie behauptet kürzen sich alle Normierungsfaktoren.

Die Polarisation des einlaufenden Photons kann beliebig gewählt werden, für die Summation über die Polarisationszustände des gestreuten Photons wählt man zwei orthogonale Polarisationszustände. Betrachtet man ein zirkular polarisiertes einlaufendes Photon mit der Helizität  $\Lambda$ , also  $J_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\Lambda \end{pmatrix}$ , ergibt sich der entsprechende Polarisationsvektor gemäß Gl. (2.37). Für das gestreute Photon wird über lineare Polarisationszustände parallel bzw. senkrecht zur Streuebene summiert,  $J_{f1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  bzw.  $J_{f2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die entsprechenden Polarisationsvektoren lauten nach Gl. (2.39)

$$\hat{\mathbf{e}}_{\sigma_{f1}}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_{f2}}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Mit diesen Vektoren erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines anfänglich zirkular polarisierten Photons:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \left( \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_{f1}}^*(\theta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i} \right|^2 + \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_{f2}}^*(\theta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i} \right|^2 \right) \\ &= \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \left( \left| \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \right|^2 \right) \\ &= \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit dem *klassischen Elektronenradius*  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2,8 \text{ fm}$ .

Das Ergebnis ist nur vom Streuwinkel  $\theta$  abhängig, eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel  $\varphi$  besteht nicht, da durch die zirkulare Polarisation des einlaufenden Photons keine Richtung ausgezeichnet ist.

### 3.3 Stokes-Parameter des gestreuten Lichts

Die Elemente der Dichtematrix ergeben sich zu

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \frac{(\hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i})(\hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_i})^*}{\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)} \quad (3.17)$$

mit zwei orthogonalen Polarisationszuständen  $\sigma$  und  $\sigma'$ ; wir wählen lineare Polarisation parallel und senkrecht zur Streuebene. Die Dichtematrix des gestreuten Photons ist abhängig vom



Streuwinkel  $\theta$  und von der Helizität  $\Lambda$  des einfallenden Photons. Sie lautet

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -i\Lambda \cos \theta \\ i\Lambda \cos \theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Die Stokes-Parameter berechnet man nach den Gln. (2.33). Man erhält

$$\tilde{P}_1 = \frac{-\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad \tilde{P}_2 = 0, \quad \tilde{P}_3 = \frac{2\Lambda \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (3.19)$$

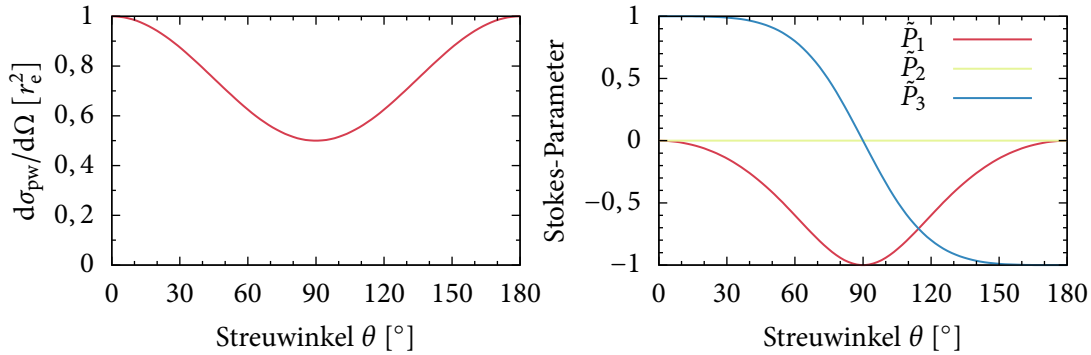
Für den Polarisationsgrad ergibt sich

$$\Pi = \sqrt{\tilde{P}_1^2 + \tilde{P}_2^2 + \tilde{P}_3^2} = 1. \quad (3.20)$$

Die gestreute Strahlung ist also vollständig polarisiert.

### 3.4 Diskussion der Ergebnisse

Der differentielle Wirkungsquerschnitt und die Stokes-Parameter für die Streuung eines Photons mit der Helizität  $\Lambda = 1$  sind in Abbildung 3.1 in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  dargestellt. Für ein Photon mit der Helizität  $\Lambda = -1$  kehrt sich lediglich das Vorzeichen von  $\tilde{P}_3$  um.



**Abbildung 3.1:** Differentieller Wirkungsquerschnitt und normierte Stokes-Parameter der gestreuten Photonen für ein einlaufendes Photon mit der Helizität  $\Lambda = 1$  in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$ . Eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons besteht erwartungsgemäß nicht.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist maximal für  $\theta = 0$  bzw.  $\theta = 180^\circ$  (strenge Vor- bzw. Rückwärtsstreuung), für  $\theta = 90^\circ$  fällt er auf die Hälfte ab und ist minimal.

Die Parameter  $\tilde{P}_1$  und  $\tilde{P}_2$  beschreiben die Anteile linearer Polarisation. Da  $\tilde{P}_2 = 0$  und  $\tilde{P}_1 \leq 0$  ist, ist der Anteil der linearen Polarisation stets senkrecht zur Streuebene polarisiert. Für  $\theta = 0$  und  $\theta = 180^\circ$  verschwindet der Anteil der linearen Polarisation; für  $\theta = 90^\circ$  ist er maximal, dort ist

### 3 Thomson-Streuung für den Fall ebener Wellen

die gesamte Strahlung linear polarisiert. Der Parameter  $\tilde{P}_3$  beschreibt den Anteil der zirkularen Polarisation, das Vorzeichen zeigt die entsprechende Helizität an. Für  $0 \leq \theta < 90^\circ$  stimmen die Helizitäten von einfallendem und gestreutem Strahl überein, für  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  ist die Helizität umgekehrt. Dies ist anschaulich klar, wenn man den Fall  $\theta = 180^\circ$  betrachtet: In diesem Fall kehrt sich die Ausbreitungsrichtung des Elektrons um, doch da sich auch die Helizität umkehrt, ändert sich die Richtung des Photonenspins nicht.

Sowohl der differentielle Wirkungsquerschnitt als auch die Stokes-Parameter hängen erwartungsgemäß nicht vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons ab, wenn man ein zirkular polarisiertes einlaufendes Photon betrachtet.

## 4 Streuung eines Bessel-Strahls an einer ebenen Elektronenwelle

In diesem Kapitel wird die Streuung eines einzelnen Bessel-Strahls an einem Elektronenstrahl betrachtet, der keine laterale Struktur aufweist, bzw. dessen laterale Struktur viel größer als die Ausdehnung des Bessel-Strahls ist. Typische Ausdehnungen von realisierbaren Bessel-Strahlen, charakterisiert durch den Abstand des ersten Intensitätsmaximums von der Strahlachse, liegen im Bereich einiger  $10 \mu\text{m}$  [10]. Da der Elektronenstrahl in der Größenordnung des Bessel-Strahls keine laterale Struktur aufweist, ist es zulässig, ihn wie im vorangegangenen Kapitel als ebene Welle zu modellieren.

### 4.1 Das Übergangsmatrixelement für Bessel-Strahlen

Wie in Abschnitt 3.1 sei  $\mathbf{q}_i = 0$ , man betrachtet also ruhende Elektronen. Die Strahlachse des Bessel-Strahls stimme mit der  $z$ -Achse überein. Unter Anwendung der Entwicklung (2.49) erhält man das Matrixelement für ein eintreffendes Twisted Photon  $|\kappa, k_z, m, \Lambda\rangle$  als Integral über Matrixelemente für ebene Wellen:

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(\text{tw})} &= \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \kappa, k_z, m, \Lambda \rangle \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda \rangle. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Das Matrixelement für Twisted Light ist also eine Superposition von Matrixelementen für ebene Wellen, wobei die Entwicklungskoeffizienten  $a_{\kappa m}$  die gleichen wie in Gl. (2.49) sind.

### 4.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Das Betragsquadrat des Übergangsmatrixelements (4.1) lautet

$$\begin{aligned} |M_{fi}^{(\text{tw})}|^2 &= \left( \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda \rangle \right) \\ &\quad \times \left( \int \frac{d^2 \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}'_\perp) \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \mathbf{k}'_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda \rangle \right)^*. \end{aligned} \quad (4.2)$$

#### 4 Streuung eines Bessel-Strahls an einer ebenen Elektronenwelle

Einsetzen des Matrixelements (3.4) für ebene Wellen und der Amplituden (1.5) führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}^{(tw)}|^2 &= \left[ \frac{e^2}{m_e c} \frac{2\pi\hbar}{V} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \right]^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{\kappa} \underbrace{(-i)^m i^m}_{=1} e^{im\varphi_k} e^{-im\varphi_{k'}} \delta(k_\perp - \kappa) \delta(k'_\perp - \kappa) \\
 &\quad \times \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\Lambda (\mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z) \left( \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\Lambda (\mathbf{k}'_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z) \right)^*}{\sqrt{\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2} k_f} \sqrt{\sqrt{k_z'^2 + k_\perp'^2} k_f}} \\
 &\quad \times \delta^{(3)} (\mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \delta^{(3)} (\mathbf{k}'_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) . \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Die transversalen Anteile  $\mathbf{k}_\perp$  der Wellenvektoren werden nun in Polarkoordinaten ausgedrückt:

$$\mathbf{k}_\perp = k_\perp (\cos \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_y) , \quad \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k}_\perp = \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi_k . \quad (4.4)$$

Im Folgenden schreibe ich  $\mathbf{k}_i(\varphi_k) = \kappa \cos \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_x + \kappa \sin \varphi_k \hat{\mathbf{e}}_y + k_z \hat{\mathbf{e}}_z$  und  $k_i = |\mathbf{k}_i(\varphi_k)| = \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}$ . Damit ergibt sich nach der Integration über  $k_\perp$  und  $k'_\perp$ :

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}^{(tw)}|^2 &= \left[ \frac{e^2}{m_e c} \frac{2\pi\hbar}{V} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \right]^2 \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_i k_f} \int d\varphi_k \int d\varphi_{k'} e^{im(\varphi_k - \varphi_{k'})} \\
 &\quad \times \left( \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\Lambda (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right) \left( \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\Lambda (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_{k'})) \right)^* \\
 &\quad \times \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_{k'}) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) . \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Die Delta-Distributionen werden wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned}
 &\delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_{k'}) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \\
 &= \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) - \mathbf{k}_i(\varphi_{k'})) \\
 &= \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \frac{1}{\kappa} \delta(\kappa - \kappa') \delta(\varphi_k - \varphi_{k'}) \delta(k_z - k_z') \\
 &= \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \frac{1}{\kappa} \frac{R}{\pi} \frac{L_z}{2\pi} \delta(\varphi_k - \varphi_{k'}) . \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Die Regularisierung  $\delta(\kappa - \kappa') = \frac{R}{\pi}$  der radialen Delta-Distribution ist bei Ivanov [12] beschrieben. Nach diesen Umformungen lässt sich das Integral über  $\varphi_{k'}$  ausführen und man erhält

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}^{(tw)}|^2 &= \left[ \frac{e^2}{m_e c} \frac{2\pi\hbar}{V} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \right]^2 \frac{1}{(2\pi)^4} L_z \frac{R}{\pi} \frac{1}{k_i k_f} \int d\varphi_k \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\Lambda (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2 \\
 &\quad \times \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) . \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

## 4.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Damit ergibt sich die Übergangsrate

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^6 \int d^3 \mathbf{q}_f \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} \left| M_{fi}^{(\text{tw})} \right|^2 \frac{1}{\hbar c} \delta(k_f - k_i) \\
 &= \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \frac{1}{V^2} L_z \frac{R}{\pi} \int d^3 \mathbf{q}_f \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} \frac{1}{k_i k_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2 \\
 &\quad \times \delta^{(3)} (\mathbf{k}_i(\varphi_k) + \mathbf{q}_i - \mathbf{k}_f - \mathbf{q}_f) \delta(k_f - k_i) \\
 &= \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \frac{1}{V^2} L_z \frac{R}{\pi} \int d^3 \mathbf{k}_f \sum_{\sigma_f} \frac{1}{k_i k_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2 \delta(k_f - k_i) \\
 &= \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \frac{1}{V^2} L_z \frac{R}{\pi} \int d\Omega \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

Die Teilchendichte des Elektrons ist unverändert  $n_{\text{el}} = \frac{1}{V}$ . Die Teilchendichte des Bessel-Strahls ist dagegen nicht räumlich konstant:

$$\begin{aligned}
 n_{\text{ph}}^{(\text{tw})}(\mathbf{x}) &= \left| \psi_{\text{ph}}^{(\text{tw})}(\mathbf{x}) \right|^2 \\
 &= \left| \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} J_m(\kappa r_{\perp}) e^{im\varphi} e^{ik_z z} \right|^2 \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi V} J_m^2(\kappa r_{\perp}). \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Die Teilchendichte muss daher über das zylindrische Volumen  $V\pi R^2 L_z$  gemittelt werden. Für die gemittelte Photonendichte erhält man

$$\begin{aligned}
 \langle n_{\text{ph}}^{(\text{tw})} \rangle &= \frac{1}{V} \int d^3 \mathbf{x} n_{\text{ph}}^{(\text{tw})}(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi V^2} \int_0^R dr_{\perp} r_{\perp} J_m^2(\kappa r_{\perp}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz \\
 &= \frac{L_z}{V^2} \underbrace{\int_0^R dr_{\perp} \kappa r_{\perp} J_m^2(\kappa r_{\perp})}_{\approx \frac{R}{\pi}} = \frac{L_z R}{\pi V^2}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Die dabei verwendete Abschätzung des Integrals im Limes  $R \rightarrow \infty$  ist bei Jentschura und Serbo [11, Appendix B] angegeben. Somit erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{\text{tw}}}{d\Omega} = \frac{1}{n_{\text{el}} \langle n_{\text{ph}} \rangle c V} \frac{d\dot{P}}{d\Omega} = r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2. \tag{4.11}$$

#### 4 Streuung eines Bessel-Strahls an einer ebenen Elektronenwelle

Aufgrund der Relation

$$\hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}(\theta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \varphi_k) = \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \varphi_k - \varphi), \quad (4.12)$$

die sich leicht überprüfen lässt, und der Integration über  $\varphi_k$  hängt der differentielle Wirkungsquerschnitt nicht vom Azimutalwinkel  $\varphi$  des gestreuten Photons ab. Daher kann der Einfachheit halber  $\varphi = 0$  für die Berechnung angenommen werden. Dies ist zu erwarten, da auch bei der Streuung eines Bessel-Strahls zirkularer Polarisation keine Richtung ausgezeichnet ist. Nach Lösung des Integrals und Summation über die orthogonale Polarisationszustände  $\sigma_f$  erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Thomson-Streuung eines Bessel-Strahls schließlich einen kompakten analytischen Ausdruck:

$$\frac{d\sigma_{\text{tw}}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{4} \left[ (1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta \right]. \quad (4.13)$$

Wie man leicht nachrechnet, erhält man im Fall  $\theta_k = 0$  das Ergebnis für ebene Wellen, siehe Gl. (3.16). Man erkennt ebenfalls, dass die topologische Ladung  $m$  in dem Ausdruck nicht vorkommt, sie hat also keinen Einfluss auf die Winkelverteilung.

### 4.3 Berechnung der Stokes-Parameter

Die Untersuchung der Polarisation der gestreuten Strahlung geschieht mittels der Stokes-Parameter, die man gemäß Unterabschnitt 2.3.3 aus der Dichtematrix erhält. Die Elemente der Dichtematrix sind

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \frac{(\hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \varphi_k)) (\hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \varphi_k))^*}{\frac{1}{4} [(1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta]}. \quad (4.14)$$

Die Integration ergibt

$$\rho = \frac{1}{(1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta} \times \begin{pmatrix} (1 + \cos^2 \theta_k) \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta & -2i\Lambda \cos \theta_k \cos \theta \\ 2i\Lambda \cos \theta_k \cos \theta & 1 + \cos^2 \theta_k \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

und daraus erhält man die Stokes-Parameter als kompakte analytische Ausdrücke

$$\tilde{P}_1 = \frac{(1 - 3 \cos^2 \theta_k) \sin^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{P}_2 = 0, \quad (4.17)$$

#### 4.4 Einfluss der Parameter des Bessel-Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation

$$\tilde{P}_3 = \frac{4\Lambda \cos \theta_k \cos \theta}{(1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta} . \quad (4.18)$$

Im Gegensatz zum differentiellen Wirkungsquerschnitt sind die Stokes-Parameter von der Helizität des Bessel-Strahls abhängig, diese bestimmt das Vorzeichen von  $\tilde{P}_3$ . Aus den Stokes-Parametern ergibt sich der Polarisationsgrad zu

$$\Pi = \frac{\sqrt{(1 - 3 \cos^2 \theta_k)^2 \sin^4 \theta + 16 \cos^2 \theta_k \cos^2 \theta}}{(1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta} . \quad (4.19)$$

Auch hier erkennt man, dass sich im Fall  $\theta_k = 0$  die Stokes-Parameter und der Polarisationsgrad für ebene Wellen (siehe Gln. (3.19) und (3.20)) ergeben.

### 4.4 Einfluss der Parameter des Bessel-Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation

Die topologische Ladung  $m$  hat keinen Einfluss auf Winkelverteilung und Polarisation der gestreuten Strahlung, da sie in der Entwicklung (2.49) lediglich in Form eines Phasenterms innerhalb der Amplituden  $a_{\chi m}$  in die Berechnung eingeht, der durch die Bildung des Betragsquadrates verschwindet.

#### 4.4.1 Einfluss der Helizität $\Lambda$

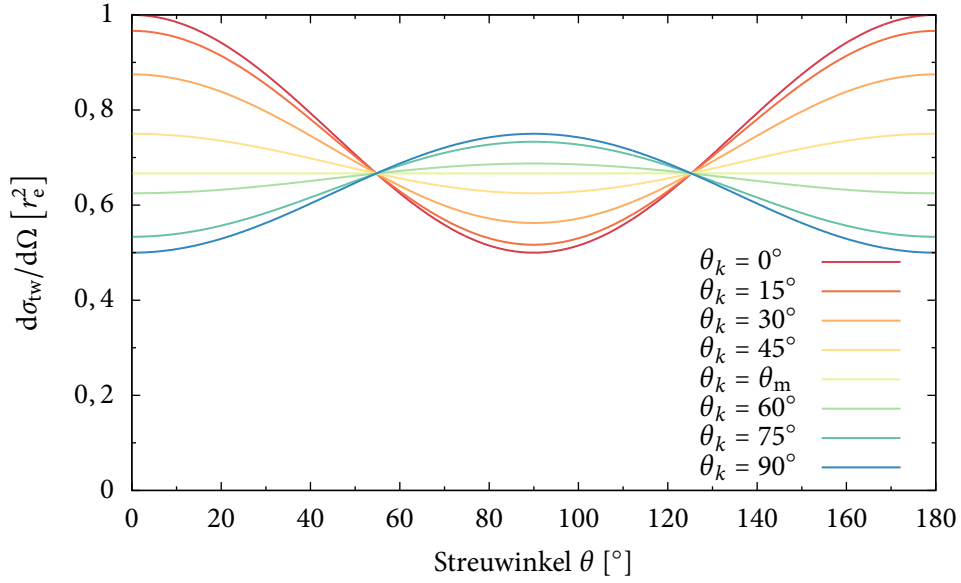
Die Helizität  $\Lambda$  des Bessel-Strahls bestimmt lediglich das Vorzeichen von  $\tilde{P}_3$ , die Winkelverteilung und die restlichen Stokes-Parameter hängen nicht von ihr ab. Dies ist zu erwarten, da  $\tilde{P}_3$  den Anteil der zirkularen Polarisation angibt und das Vorzeichen die entsprechende Helizität beschreibt. In dieser Hinsicht verhalten sich Bessel-Strahlen und ebene Photonenwellen gleich.

#### 4.4.2 Einfluss des Öffnungswinkels $\theta_k$

In Abbildung 4.1 ist die Winkelverteilung der gestreuten Photonen für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$  zwischen 0 und 90° dargestellt. Der Fall  $\theta_k = 90^\circ$  ist dabei ein rein theoretischer Grenzfall: In diesem Fall ist  $k_z = 0$ , die Welle propagiert also nicht mehr entlang der  $z$ -Achse, sondern nur noch in radialer Richtung. Er wird hier dennoch angeführt, um die theoretischen Grenzen aufzuzeigen.

Für  $\theta_k = 0$  entsprechen der differentiellen Wirkungsquerschnitt und die Stokes-Parameter exakt denen für den Streuung einer ebenen Welle. Je größer der Öffnungswinkel ist, desto deutlicher werden die Unterschiede.

#### 4 Streuung eines Bessel-Strahls an einer ebenen Elektronenwelle



**Abbildung 4.1:** Differentieller Wirkungsquerschnitt  $d\sigma_{tw}/d\Omega$  in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Der Fall  $\theta_k = 0$  entspricht ebenen Wellen. Eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons besteht nicht.

Für kleine Öffnungswinkel flacht der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma_{tw}/d\Omega$  zunächst ab: Die Maxima bei  $\theta = 0$  bzw.  $180^\circ$  und das Minimum für  $\theta = 90^\circ$  gleichen sich immer weiter an.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist schließlich konstant, wenn der Öffnungswinkel  $\theta_k$  dem *magischen Winkel*  $\theta_m = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54,7^\circ$  entspricht, in diesem Fall ist  $\kappa = \sqrt{2} k_z$ . Da  $\cos^2 \theta_m = \frac{1}{3}$  und  $\sin^2 \theta_m = \frac{2}{3}$  ist, gilt

$$\frac{d\sigma_{tw}}{d\Omega}(\theta_k = \theta_m) = \frac{r_e^2}{4} \left[ \frac{4}{3}(1 + \cos^2 \theta) + \frac{4}{3} \sin^2 \theta \right] = \frac{2}{3} r_e^2. \quad (4.20)$$

Aufgrund der Symmetrie von Gl. (4.13) bezüglich der Vertauschung von  $\theta$  und  $\theta_k$  folgt daraus, dass sich alle Kurven in Abbildung 4.1 bei  $\theta = \theta_m$  (und  $\theta = 180^\circ - \theta_m$ ) schneiden.

Für  $\theta > \theta_m$  findet man das Maximum der Winkelverteilung schließlich bei  $\theta = 90^\circ$  vor, für  $\theta = 0$  bzw.  $180^\circ$  ist der differentielle Wirkungsquerschnitt minimal. Dies ist umso stärker ausgeprägt, je größer der Öffnungswinkel  $\theta_k$  ist. Im Grenzfall  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  ist

$$d\sigma_{tw}/d\Omega(\theta=0) = \frac{1}{2} r_e^2 \quad \text{und} \quad d\sigma_{tw}/d\Omega(\theta=90^\circ) = \frac{3}{4} r_e^2. \quad (4.21)$$

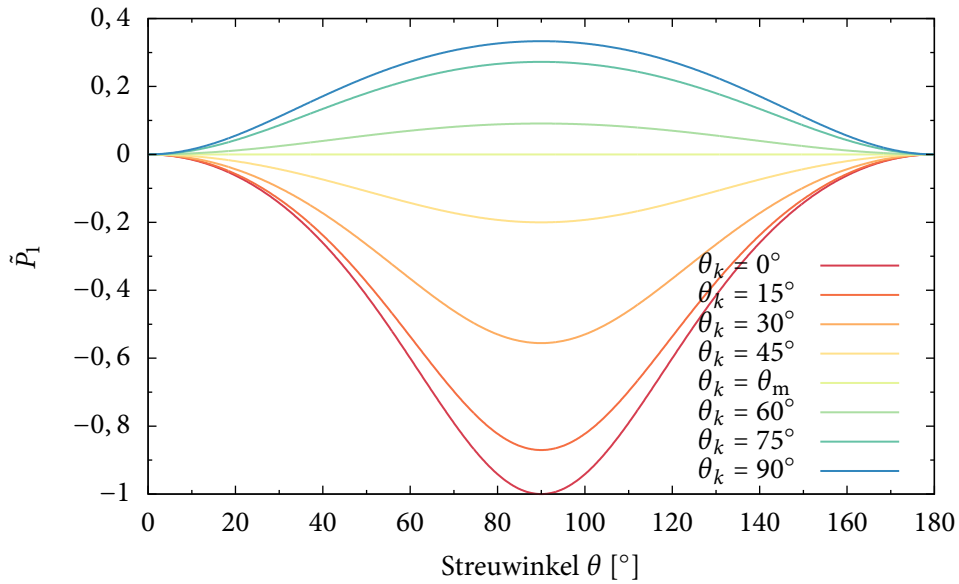
An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich die Verteilung wesentlich von der für die von Seipt, Surzhykov und Fritzsche untersuchte Inverse Compton-Streuung [1] unterscheidet, da die



#### 4.4 Einfluss der Parameter des Bessel-Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation

Strahlung hier in den gesamten Raum gestreut wird, während die gestreuten Röntgenphotonen bei der inversen Compton-Streuung im Wesentlichen auf einem Ring verteilt sind. Die Ursache dafür ist, dass hier nichtrelativistische Elektronen betrachtet werden (was eine Voraussetzung für Thomson-Streuung ist), während die Elektronen in dem erwähnten Artikel relativistische Energien ( $\gamma = 40$ ) aufweisen.

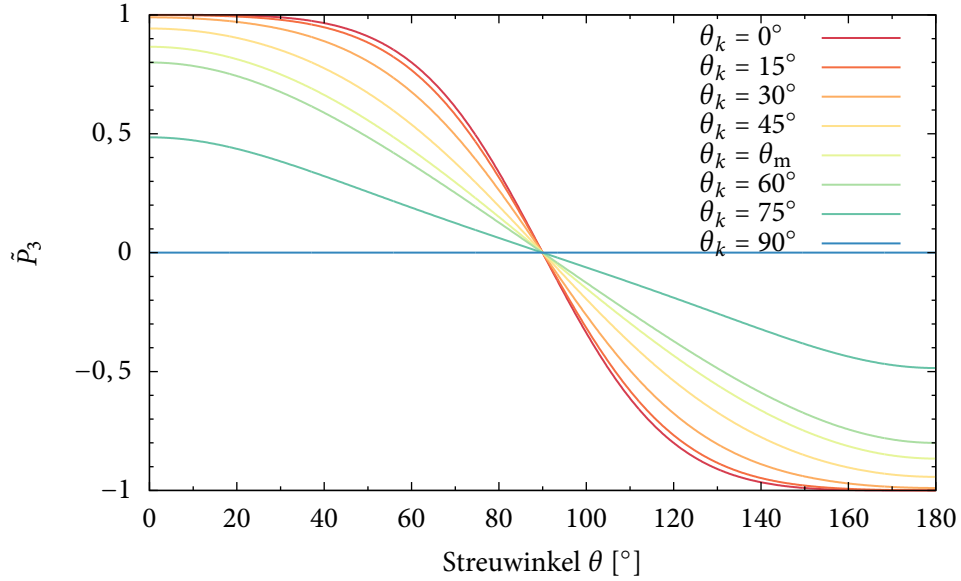
Wie im Fall ebener Wellen gilt auch für die Streuung mit einem Bessel-Strahl  $\tilde{P}_2 = 0$ . Der Parameter  $\tilde{P}_1$  ist in Abbildung 4.2 für verschiedene Öffnungswinkel aufgetragen. Er hat sein betragsmäßiges Maximum stets bei  $\theta = 90^\circ$  und verschwindet bei  $\theta = 0$  und  $\theta = 180^\circ$ . Für  $\theta_k < \theta_m$  ist  $\tilde{P}_1$  negativ, der linear polarisierte Anteil des Lichts ist also senkrecht zur Streuebene polarisiert. Mit wachsendem  $\theta_k$  nimmt der  $\tilde{P}_1$  betragsmäßig ab, bei  $\theta_k = \theta_m$  ist  $\tilde{P}_1 = 0$  für alle Streuwinkel  $\theta$ , das Licht enthält für diesen Öffnungswinkel demnach keine linear polarisierten Anteile. Für größere Öffnungswinkel erhält man positive  $\tilde{P}_1$ , also parallel zur Streuebene linear polarisiertes Licht.



**Abbildung 4.2:** Normierter Stokes-Parameter  $\tilde{P}_1$  der gestreuten Photonen in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Der Fall  $\theta_k = 0$  entspricht ebenen Wellen. Eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons besteht nicht.

Der Parameter  $\tilde{P}_3$  ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Wie bei der Streuung ebener Wellen entspricht die Helizität der gestreuten Strahlung für  $0 \leq \theta < 90^\circ$  der Helizität des Bessel-Strahls, für  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  wird die Helizität umgekehrt. Mit wachsendem Öffnungswinkel  $\theta_k$  nimmt der Anteil zirkular polarisierten Lichts ab, im Grenzfall  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  verschwindet er vollständig.

#### 4 Streuung eines Bessel-Strahls an einer ebenen Elektronenwelle



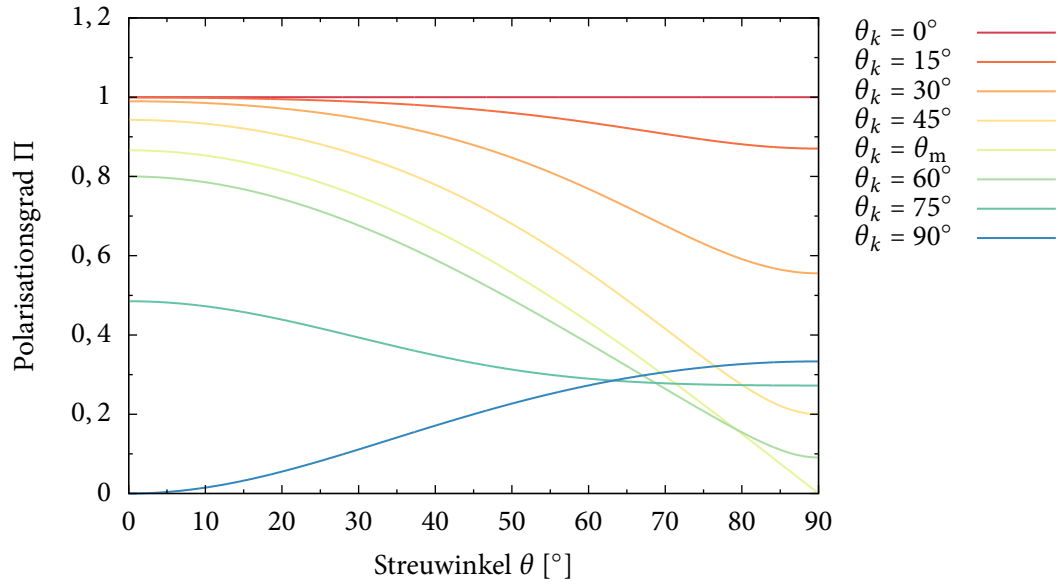
**Abbildung 4.3:** Normierter Stokes-Parameter  $\tilde{P}_3$  der gestreuten Photonen für ein einlaufendes Photon mit der Helizität  $\Lambda = 1$  in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Der Fall  $\theta_k = 0$  entspricht ebenen Wellen. Eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons besteht nicht.

Der Polarisationsgrad  $\Pi$  ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Wie man erkennt, ist die gestreute Strahlung für  $\theta_k$  nicht mehr vollständig polarisiert. Im Bereich der strengen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung fällt der Polarisationsgrad mit wachsendem Öffnungswinkel, bis er für  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  komplett verschwindet. Für den Streuwinkel  $\theta = 90^\circ$  fällt der Polarisationsgrad mit wachsendem  $\theta_k$  zunächst stark ab, bis er bei  $\theta_k = \theta_m$  den Wert Null erreicht. Für sehr große Öffnungswinkel wird das Maximum des Polarisationsgrades bei  $\theta = 90^\circ$  erreicht.

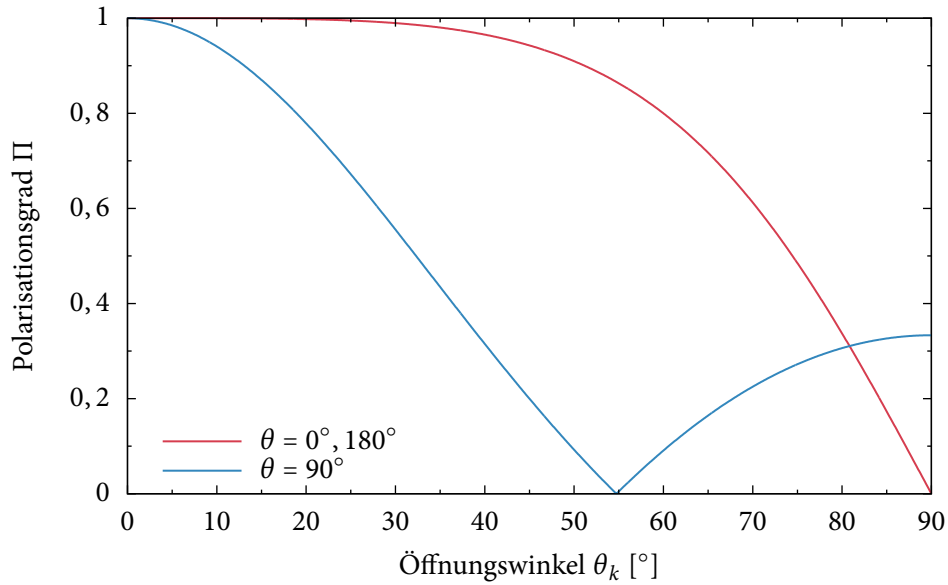
Um die Abhängigkeit des Polarisationsgrades vom Öffnungswinkel  $\theta_k$  besser zu veranschaulichen, ist diese Beziehung in Abbildung 4.5 für strenge Vor- bzw. Rückwärtsstreuung ( $\theta = 0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ ) und Senkrechtstreuung ( $\theta = 90^\circ$ ) dargestellt. Wie man erkennt, nimmt der Polarisationsgrad für Vorwärts- und Rückwärtsstreuung erst bei großen Öffnungswinkeln deutlich ab. Bei Senkrechtstreuung nimmt der Polarisationsgrad schneller ab, erreicht bei  $\theta_k = \theta_m$  den Wert 0 (vollkommen unpolarisierte Strahlung) und steigt danach wieder geringfügig.

Die in diesem Kapitel erhaltenen Resultate weisen, in Übereinstimmung mit der Literatur [12], keinerlei Abhängigkeit von der topologischen Ladung  $m$  auf. Daher wird im folgenden Kapitel eine Superposition zweier Bessel-Strahlen mit unterschiedlichem  $m$  untersucht, für welche gemäß der Literatur eine Abhängigkeit von der Differenz  $\Delta m$  der beiden topologischen Ladungen existiert.

#### 4.4 Einfluss der Parameter des Bessel-Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation



**Abbildung 4.4:** Polarisationsgrad  $\Pi$  der gestreuten Photonen in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Der Fall  $\theta_k = 0$  entspricht ebenen Wellen. Eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons besteht nicht. Der Übersichtlichkeit halber ist nur der Bereich  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  dargestellt, es gilt  $\Pi(\theta) = \Pi(180^\circ - \theta)$ .



**Abbildung 4.5:** Polarisationsgrad  $\Pi$  der gestreuten Photonen in Abhängigkeit des Öffnungswinkels  $\theta_k$  des Bessel-Strahls für die Streuwinkel  $\theta = 0^\circ$  bzw.  $180^\circ$  (strenge Vor- bzw. Rückwärtsstreuung) und  $\theta = 90^\circ$  (Senkrechtstreuung).



## 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$

In diesem Kapitel wird die Streuung einer Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleicher Wellenlänge und gleichem Öffnungswinkel, aber unterschiedlicher topologischer Ladung betrachtet. Erwartungsgemäß sollte dies zu einer Abhängigkeit der Winkelverteilung von der Differenz  $\Delta m$  der topologischen Ladungen führen, während bei der Streuung eines einzelnen Strahls mit wohldefinierter topologischer Ladung die Winkelverteilung nicht von dieser abhängt. Die Streuung findet wie im vorangegangenen Kapitel an einer ebenen Elektronenwelle statt.

Derartige Superpositionen von Bessel-Strahlen werden auch in dem eingangs erwähnten Artikel von Seipt, Surzhykov und Fritzsche [1] untersucht und sind auch schon experimentell durch Vasilyeu *et al.* [18] realisiert worden.

### 5.1 Beschreibung der Superposition

Die betrachtete Superposition besteht aus zwei Bessel-Strahlen mit identischer Strahlachse (der  $z$ -Achse), gleicher Wellenlänge und gleichem Öffnungswinkel und hat daher die Form

$$|\kappa, k_z, \alpha, \beta, m_1, m_2, \Lambda_1, \Lambda_2\rangle = \alpha |\kappa, k_z, m_1, \Lambda_1\rangle + \beta |\kappa, k_z, m_2, \Lambda_2\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (5.1)$$

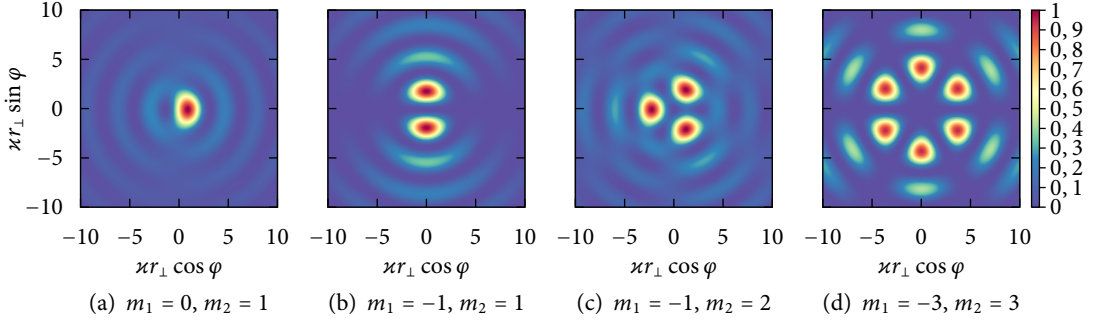
Dabei gilt die Normierungsbedingung  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Zusätzlich sei stets  $m_2 > m_1$ , also  $\Delta m = m_2 - m_1 > 0$  (der Fall  $m_1 = m_2$  ist weniger interessant und wird hier nicht betrachtet).

Die Ortswellenfunktion  $\psi_{\kappa k_z \alpha \beta m_1 m_2}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \kappa, k_z, \alpha, \beta, m_1, m_2, \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle$  zur Berechnung der Intensitätsverteilung/Teilchendichte für eine solche Superposition erhält man durch Einsetzen von Gl. (2.50)

$$\begin{aligned} \psi_{\kappa k_z \alpha \beta m_1 m_2}(\mathbf{x}) &= \alpha \psi_{\kappa k_z m_1}(\mathbf{x}) + \beta \psi_{\kappa k_z m_2}(\mathbf{x}) \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left[ \alpha J_{m_1}(\kappa r_\perp) e^{im_1 \varphi} \frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{V}} + \beta J_{m_2}(\kappa r_\perp) e^{im_2 \varphi} \frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{V}} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Intensitätsverteilung des Strahls hängt nun nicht mehr allein von  $r_\perp$  ab, sondern auch vom Azimutalwinkel  $\varphi$ . Die transversale Intensitätsverteilung, welche proportional zur Teilchendichte ist, besitzt die Form einer Blüte mit  $\Delta m$  Blütenblättern. Dies ist in Abbildung 5.1 veranschaulicht.

## 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$



**Abbildung 5.1:** Transversale Intensitätsverteilungen (in beliebigen Einheiten) für Superpositionen von zwei Bessel-Strahlen mit  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$  und unterschiedlichen topologischen Ladungen  $m_1$  und  $m_2$ . Die Intensität eines Strahls ist proportional zur Teilchendichte  $n_{\text{ph}}(\mathbf{x}) = \psi_{\text{ph}}^*(\mathbf{x})\psi_{\text{ph}}(\mathbf{x})$ .

## 5.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Das Übergangsmatrixelement für eine Superposition zweier Besselstrahlen gemäß Gl. (5.1) lautet

$$M_{fi}^{(2\text{tw})} = \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \kappa, k_z, \alpha, \beta, m_1, m_2, \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle. \quad (5.3)$$

Durch Einsetzen der Gln. (5.1) und (4.1) erhält man das Übergangsmatrixelement wiederum als Superposition des Matrixelement für ebene Wellen, es gilt

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(2\text{tw})} &= \alpha \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \kappa, k_z, m_1, \Lambda_1 \rangle + \beta \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \kappa, k_z, m_2, \Lambda_2 \rangle \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \left[ \alpha a_{\kappa m_1}(\mathbf{k}_\perp) \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \beta a_{\kappa m_2}(\mathbf{k}_\perp) \langle \mathbf{q}_f; \mathbf{k}_f, \sigma_f | \check{H}_{\text{int}}'' | \mathbf{q}_i = 0; \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda_2 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die entsprechende Übergangsrate ergibt sich wiederum aus Fermis Goldener Regel (2.10) durch Quadrieren des Matrixelements (5.4). Nach Rechnungen, die analog zu den in Kapitel 4 detailliert dargelegten verlaufen, erhält man

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \frac{1}{V^2} L_z \frac{R}{\pi} \int d\Omega \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \\ &\quad \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \left[ \alpha (-i)^{m_1} e^{im_1 \varphi_k} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_1}(\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) + \beta (-i)^{m_2} e^{im_2 \varphi_k} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_2}(\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Teilchendichte für die Superposition,

$$n_{\text{ph}}^{(2\text{tw})}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2\pi V} \left[ |\alpha|^2 J_{m_1}^2(\kappa r_\perp) + |\beta|^2 J_{m_2}^2(\kappa r_\perp) + (\alpha^* \beta e^{i\Delta m \varphi} + \text{c. c.}) J_{m_1}(\kappa r_\perp) J_{m_2}(\kappa r_\perp) \right], \quad (5.6)$$

## 5.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

ist wiederum nicht räumlich konstant, daher muss sie über das Volumen gemittelt werden. Für die gemittelte Teilchendichte erhält man nach einigen Rechnungen

$$\begin{aligned}
 \langle n_{\text{ph}}^{(2\text{tw})} \rangle &= \frac{1}{V} \int d^3 \mathbf{x} n_{\text{ph}}^{(2\text{tw})}(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi V^2} |\alpha|^2 \int d^3 \mathbf{x} J_{m_1}^2(\kappa r_{\perp}) + \frac{\kappa}{2\pi V^2} |\beta|^2 \int d^3 \mathbf{x} J_{m_2}^2(\kappa r_{\perp}) \\
 &\quad + \frac{\kappa}{2\pi V^2} \int d^3 \mathbf{x} 2 \operatorname{Re} \left( \alpha^* \beta e^{i(m_2 - m_1)\varphi} \right) J_{m_1}(\kappa r_{\perp}) J_{m_2}(\kappa r_{\perp}) \\
 &= \frac{L_z R}{\pi V^2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \frac{L_z}{2\pi V^2} \int_0^R dr_{\perp} \kappa r_{\perp} J_{m_1}(\kappa r_{\perp}) J_{m_2}(\kappa r_{\perp}) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi (\alpha^* \beta e^{i\Delta m \varphi} + \text{c. c.})}_{\substack{= 2\pi(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) \delta_{m_1 m_2} \\ = 0, \text{ da } m_1 \neq m_2}} \\
 &= \frac{L_z R}{\pi V^2}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Wegen  $(-i)^m = e^{-im\pi/2}$  ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt dann zu

$$\frac{d\sigma_{2\text{tw}}}{d\Omega} = r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \left[ \alpha e^{im_1(\varphi_k - \pi/2)} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_1} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) + \beta e^{im_2(\varphi_k - \pi/2)} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_2} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right] \right|^2. \tag{5.8}$$

Der Integrand lässt sich aufteilen in einen von  $m_1$  und  $m_2$  unabhängigen Term und einen von  $\Delta m$  abhängigen Interferenzterm:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{2\text{tw}}}{d\Omega} &= r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left\{ |\alpha|^2 \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_1} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2 + |\beta|^2 \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_2} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} \left[ \alpha^* \beta e^{i\Delta m(\varphi_k - \pi/2)} \left( \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_1} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right) \left( \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_2} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right)^* \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}}$  und  $\Lambda_1 = \Lambda_2 =: \Lambda$ . Die beiden Strahlen mit unterschiedlicher topologischer Ladung haben also betragsmäßig den gleichen Anteil an der Superposition und eine Phasendifferenz von  $\delta$ . Zudem haben beide Strahlen die gleiche Helizität. Damit erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{2\text{tw}}}{d\Omega} &= r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left[ 1 + \operatorname{Re} \left( e^{i[\Delta m(\varphi_k - \frac{\pi}{2}) + \delta]} \right) \right] \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\hat{\mathbf{k}}_f) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\hat{\mathbf{k}}_i(\varphi_k)) \right|^2 \\
 &= r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left[ 1 + \cos \left( \Delta m \left( \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \right) \right] \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\theta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\theta_k, \varphi_k) \right|^2 \\
 &= r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\varphi_k}{2\pi} \left[ 1 + \cos \left( \Delta m \left( \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \right) \right] \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^* (\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda} (\theta_k, \varphi_k - \varphi) \right|^2,
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

## 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$

wobei wieder die Relation (4.12) verwendet wurde. Zur weiteren Vereinfachung substituiere ich die Integrationsvariable  $\varphi_k$  durch  $\tilde{\varphi}_k := \varphi_k - \varphi$  und definiere die neue Größe  $\tilde{\delta} := \delta + \Delta m \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$ , die alle auftretenden Phasenverschiebungen in sich vereint. Insbesondere der Azimutalwinkel des gestreuten Photons wird so zu einem reinen Phasenterm der Kosinusfunktion, wodurch die weitere Untersuchung vereinfacht wird. Damit erhält der differentielle Wirkungsquerschnitt die einfache Form

$$\frac{d\sigma_{2tw}}{d\Omega} = r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\tilde{\varphi}_k}{2\pi} [1 + \cos(\Delta m \tilde{\varphi}_k + \tilde{\delta})] \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right|^2. \quad (5.11)$$

Die Größen  $\varphi$  und  $\delta$  gehen somit nur noch mittels  $\tilde{\delta}$  in das Ergebnis ein.

Teilt man das Integral in den von  $\Delta m$  und  $\tilde{\delta}$  unabhängigen Teil und den Interferenzterm gemäß

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{2tw}}{d\Omega} = r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\tilde{\varphi}_k}{2\pi} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right|^2 \\ + r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\tilde{\varphi}_k}{2\pi} \cos(\Delta m \tilde{\varphi}_k + \tilde{\delta}) \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right|^2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

so erkennt man:

- Der erste Term entspricht dem differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma_{tw}/d\Omega$  für einen einzelnen Bessel-Strahl, siehe Gl. (4.11).
- Der Interferenzterm verschwindet, außer für  $\Delta m \in \{0, 1, 2\}$  (dabei ist  $\Delta m = 0$  *a priori* ausgeschlossen). Dies liegt an der Orthogonalität der Funktionen  $\cos(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$ , wodurch das Integral über  $\tilde{\varphi}_k$  in den meisten Fällen verschwindet. Dies ist in Abschnitt A.4 im Anhang näher beschrieben.

Dieses Ergebnis unterscheidet sich qualitativ von der von Seipt, Surzhykov und Fritzsche durchgeführten Untersuchung der Inversen Compton-Streuung mit *Twisted Electrons* [1], bei der die Winkelverteilung auch für höhere  $\Delta m$  von dem Interferenzterm beeinflusst wird. Im Folgenden sei der Interferenzterm mit  $d\sigma_{int}/d\Omega$  bezeichnet, also

$$\frac{d\sigma_{2tw}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{tw}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{int}}{d\Omega}. \quad (5.13)$$

Führt man das Integral über  $\varphi_k$  aus, erhält man

$$\frac{d\sigma_{int}}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{r_e^2}{2} \cos \tilde{\delta} \cos \theta_k \sin \theta_k \cos \theta \sin \theta, & \Delta m = 1, \\ \frac{r_e^2}{8} \cos \tilde{\delta} \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta, & \Delta m = 2, \\ 0, & \Delta m \geq 3. \end{cases} \quad (5.14)$$



Der Term ist also immer proportional zu  $\cos \tilde{\delta}$ . Dieses Resultat wird in Abschnitt 5.4 diskutiert.

### 5.3 Berechnung der Stokes-Parameter

Die Elemente der Dichtematrix lauten allgemein

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \frac{r_e^2}{d\sigma_{2tw}/d\Omega} \int \frac{d\tilde{\varphi}_k}{2\pi} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\theta, 0) \cdot \left[ \alpha e^{im_1(\varphi_k - \pi/2)} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_1}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) + \beta e^{im_2(\varphi_k - \pi/2)} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_2}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right] \right\} \\ \times \left\{ \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\theta, 0) \cdot \left[ \alpha e^{im_1(\varphi_k - \pi/2)} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_1}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) + \beta e^{im_2(\varphi_k - \pi/2)} \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda_2}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right] \right\}^* . \quad (5.15)$$

Hier soll ebenfalls nur der Spezialfall  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{e^{i\tilde{\delta}}}{\sqrt{2}}$  und  $\Lambda_1 = \Lambda_2 =: \Lambda$  betrachtet werden. In diesem Fall ist

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \frac{r_e^2}{d\sigma_{2tw}/d\Omega} \int \frac{d\tilde{\varphi}_k}{2\pi} \left[ 1 + \cos(\Delta m \tilde{\varphi}_k + \tilde{\delta}) \right] \left[ \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right] \left[ \hat{\mathbf{e}}_{\sigma'}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right]^* \quad (5.16)$$

Führt man die Integration aus, erhält man für  $\Delta m = 1$  die Einträge

$$\rho_{\parallel\parallel} = \frac{(1 + \cos^2 \theta_k) \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta + 2 \cos \tilde{\delta} \cos \theta_k \sin \theta_k \cos \theta \sin \theta}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.17)$$

$$\rho_{\perp\perp} = \frac{1 + \cos^2 \theta_k}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.18)$$

$$\rho_{\parallel\perp} = \frac{-2i\Lambda \cos \theta_k \cos \theta - \cos \tilde{\delta} \sin \theta_k \sin \theta (\cos \theta_k + i\Lambda)}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.19)$$

$$\rho_{\perp\parallel} = \rho_{\parallel\perp}^* \quad (5.20)$$

mit dem gemeinsamen Nenner

$$A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta}) = (1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta + 2 \cos \tilde{\delta} \cos \theta_k \sin \theta_k \cos \theta \sin \theta. \quad (5.21)$$

Damit ergeben sich die Stokes-Parameter

$$\tilde{P}_1 = \frac{(1 - 3 \cos^2 \theta_k) \sin^2 \theta + 2 \cos \tilde{\delta} \cos \theta_k \sin \theta_k \cos \theta \sin \theta}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.22)$$

$$\tilde{P}_2 = \frac{2 \cos \tilde{\delta} \cos \theta_k \sin \theta_k \sin \theta}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.23)$$

$$\tilde{P}_3 = \frac{2\Lambda(2 \cos \theta_k \cos \theta + \cos \tilde{\delta} \sin \theta_k \sin \theta)}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})} \quad (5.24)$$

5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel  $\theta_k$

und der Polarisationsgrad

$$\Pi = \frac{\sqrt{B(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}}{A(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})} \quad (5.25)$$

mit

$$B(\theta_k, \theta, \tilde{\delta}) = \left[ \left( 1 - 3 \cos^2 \theta_k \right) \sin^2 \theta + 2 \cos \tilde{\delta} \cos \theta_k \sin \theta_k \cos \theta \sin \theta \right]^2 + 4 \cos^2 \tilde{\delta} \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta + 4 \left( 2 \cos \theta_k \cos \theta + \cos \tilde{\delta} \sin \theta_k \sin \theta \right)^2. \quad (5.26)$$

Für  $\Delta m = 2$  ist

$$\rho_{\parallel\parallel} = \frac{(1 + \cos^2 \theta_k) \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \tilde{\delta} \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.27)$$

$$\rho_{\perp\perp} = \frac{1 + \cos^2 \theta_k + \frac{1}{2} \cos \tilde{\delta} \sin^2 \theta_k}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.28)$$

$$\rho_{\parallel\perp} = \frac{\left( -2i\Lambda \cos \theta_k + \frac{1}{2} \sin \tilde{\delta} \sin^2 \theta_k \right) \cos \theta}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad (5.29)$$

$$\rho_{\perp\parallel} = \rho_{\parallel\perp}^* \quad (5.30)$$

mit dem Nenner

$$C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta}) = (1 + \cos^2 \theta_k)(1 + \cos^2 \theta) + \left( 2 + \frac{1}{2} \cos \tilde{\delta} \right) \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta. \quad (5.31)$$

Damit ergeben sich die Stokes-Parameter

$$\tilde{P}_1 = \frac{\left[ \left( 3 + \frac{1}{2} \cos \tilde{\delta} \right) \sin^2 \theta_k - 2 \right] \sin^2 \theta}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad \tilde{P}_2 = \frac{-\sin \tilde{\delta} \sin^2 \theta_k \cos \theta}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}, \quad \tilde{P}_3 = \frac{4\Lambda \cos \theta_k \cos \theta}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})} \quad (5.32)$$

und der Polarisationsgrad

$$\Pi = \frac{\sqrt{\left[ \left( 3 + \frac{1}{2} \cos \tilde{\delta} \right) \sin^2 \theta_k - 2 \right]^2 \sin^4 \theta + \left( \sin^2 \tilde{\delta} \sin^4 \theta_k + 16 \cos^2 \theta_k \right) \cos^2 \theta}}{C(\theta_k, \theta, \tilde{\delta})}. \quad (5.33)$$

Auch die Stokes-Parameter und der Polarisationsgrad weisen also eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons (in Form des Parameters  $\tilde{\delta}$ ) auf.

## 5.4 Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation

Die Winkelverteilung und die Polarisation der gestreuten Strahlung werden in diesem Abschnitt für  $\Delta m = 1$  und  $\Delta m = 2$  diskutiert. Für andere  $\Delta m$  erhält man stets das Ergebnis für einen einzelnen Bessel-Strahl, das in Kapitel 4 betrachtet wurde, da der Interferenzterm  $d\sigma_{\text{int}}/d\Omega$  verschwindet. Für  $\theta_k = 0$  verschwindet der Interferenzterm ebenfalls, sodass man erwartungsgemäß das Ergebnis für die Streuung ebener Wellen (siehe Kapitel 3) erhält.

Der erhaltene differentielle Wirkungsquerschnitt ist, anders als bei der Verwendung eines einzelnen Bessel-Strahls, vom Azimutalwinkel des gestreuten Photons abhängig, da dieser in die Größe  $\tilde{\delta}$  eingeht. Die erhaltenen Winkelverteilungen sind in Abbildung 5.2 ( $\Delta m = 1$ ) und Abbildung 5.3 ( $\Delta m = 2$ ) für  $\delta = 0$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$  dargestellt. Dabei beschreiben die Achsen in azimuthaler Richtung jeweils den Winkel  $\varphi$ , in radialer Richtung  $\sin \theta$  für  $\theta \in [0, \pi]$ . Für Rückwärtsstreuung, also  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ , muss der Graph im Fall  $\Delta m = 1$  um  $180^\circ$  gedreht werden, im Fall  $\Delta m = 2$  ergibt sich die gleiche Verteilung für Vor- und Rückwärtsstreuung. Dies ist leicht nachzuvollziehen, da der Interferenzterm (5.14) bei der Vertauschung  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  für  $\Delta m = 1$  lediglich sein Vorzeichen ändert und für  $\Delta m = 2$  gleich bleibt. Der Term  $d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega$  ist ebenfalls invariant unter der Vertauschung  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ .

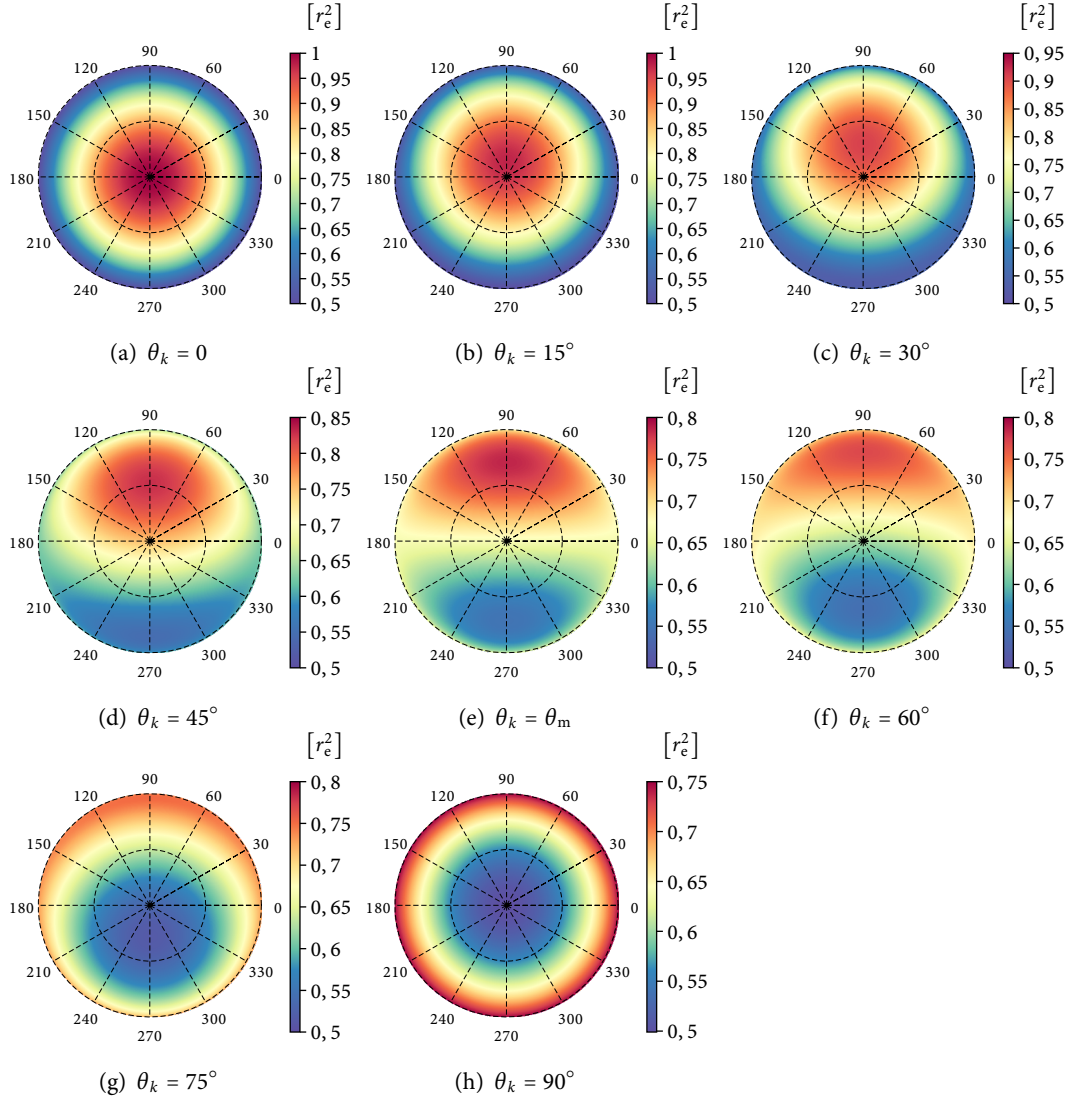
Wie man an den Graphen erkennt, besteht für bestimmte Öffnungswinkel  $\theta_k$  nun eine starke Abhängigkeit vom Azimutalwinkel  $\varphi$ , das Licht wird also bevorzugt in bestimmte Richtungen gestreut. Dabei stimmen die differentiellen Wirkungsquerschnitte für genau entgegengesetzte Richtungen stets überein, es ist also  $d\sigma_{2\text{tw}}/d\Omega(\theta, \varphi) = d\sigma_{2\text{tw}}/d\Omega(180^\circ - \theta, 180^\circ + \varphi)$ . Während sich die Maxima der Winkelverteilung für einen einzelnen Bessel-Strahl und für  $\Delta m = 2$  stets bei den Streuwinkeln  $\theta = 0^\circ$  und  $180^\circ$  oder bei  $\theta = 90^\circ$  befinden, kann für  $\Delta m = 1$  der Streuwinkel, bei dem das Maximum der Verteilung angenommen wird, auch andere Werte annehmen. Das Maximum der Verteilung bewegt sich mit zunehmendem Öffnungswinkel von  $\theta = 0$  zu  $\theta = 90^\circ$  (siehe Abbildung 5.2). Der Azimutalwinkel  $\varphi$ , für den das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnitts angenommen wird, hängt für  $\Delta m \in \{1, 2\}$  von der relativen Phase  $\delta$  der Bessel-Strahlen ab. Das Maximum der Verteilung ist jeweils ungefähr um den Faktor 1,5 bis 2 größer als das entsprechende Minimum, es ist betragsmäßig also nicht stärker ausgeprägt als im Fall eines einzelnen Bessel-Strahls oder einer ebenen Welle.

Diese Beobachtungen werden in den folgenden Abschnitten näher analysiert.

### 5.4.1 Winkelverteilung bei festem Azimutalwinkel $\varphi$

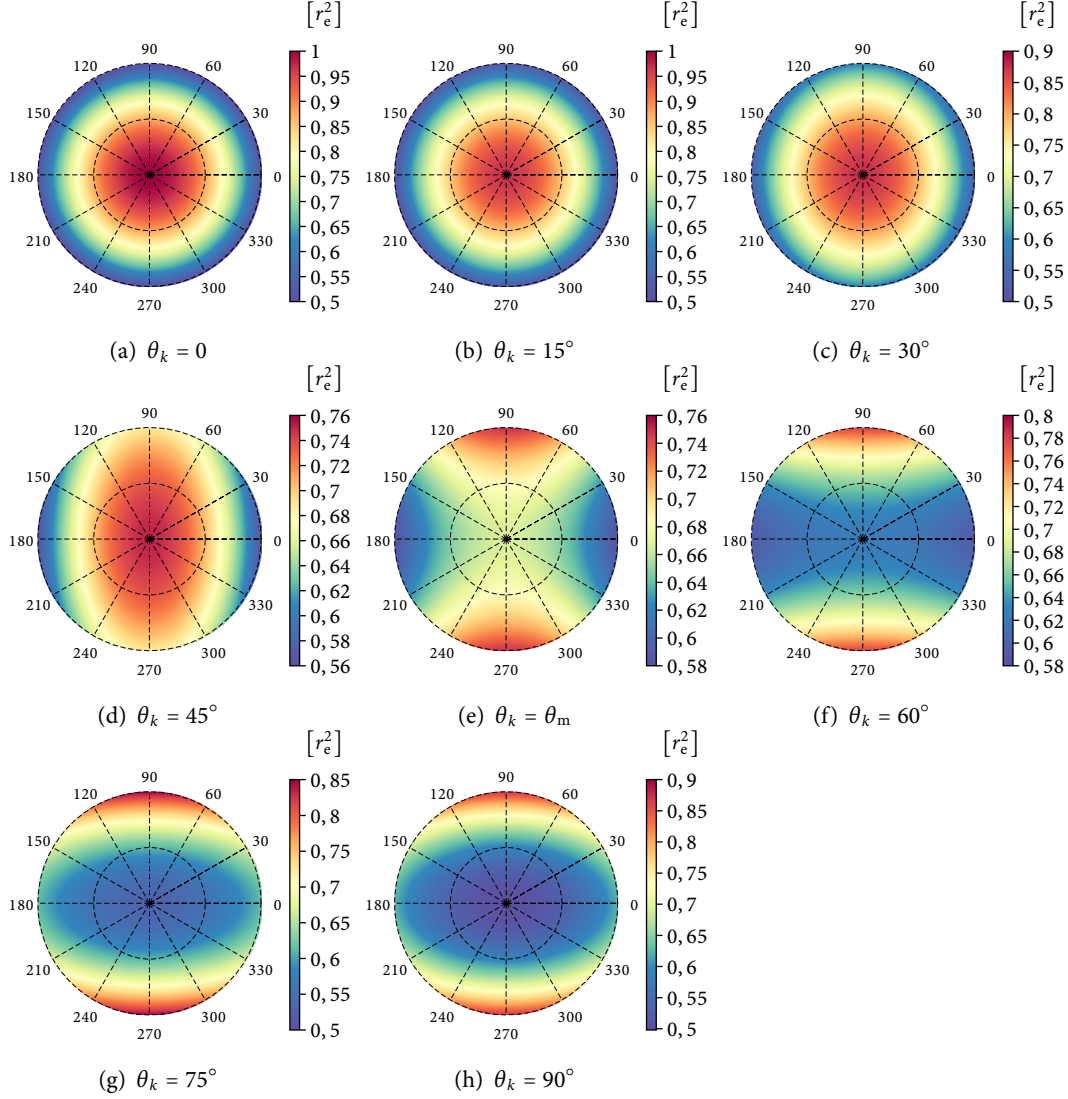
Hält man den Azimutalwinkel  $\varphi$  fest, so ist  $\tilde{\delta}$  konstant. Der Einfluss des Interferenzterms ist dann am größten, wenn  $\cos \tilde{\delta} = \pm 1$  ist. In den Abbildungen 5.4 ( $\Delta m = 1$ ) und 5.5 ( $\Delta m = 2$ ) sind die Winkelverteilungen für  $\cos \tilde{\delta} = 0$  (durchgezogene Linien, entspricht  $d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega$ ) und

## 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$



**Abbildung 5.2:** Differentieller Wirkungsquerschnitt  $d\sigma_{2\text{int}}/d\Omega$  für  $\Delta m = 1$ ,  $\delta = 0$  und  $\Lambda = 1$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  muss der entsprechende Graph um  $180^\circ$  gedreht werden, da für  $\Delta m = 1$  die Beziehung  $d\sigma_{\text{int}}/d\Omega(\theta, \varphi) = d\sigma_{\text{int}}/d\Omega(\pi - \theta, \varphi + \pi)$  gilt, während  $d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega(\theta) = d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega(\pi - \theta)$  ist und  $d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega$  nicht von  $\varphi$  abhängt). In azimuthaler Richtung ist der Winkel  $\varphi$  aufgetragen.

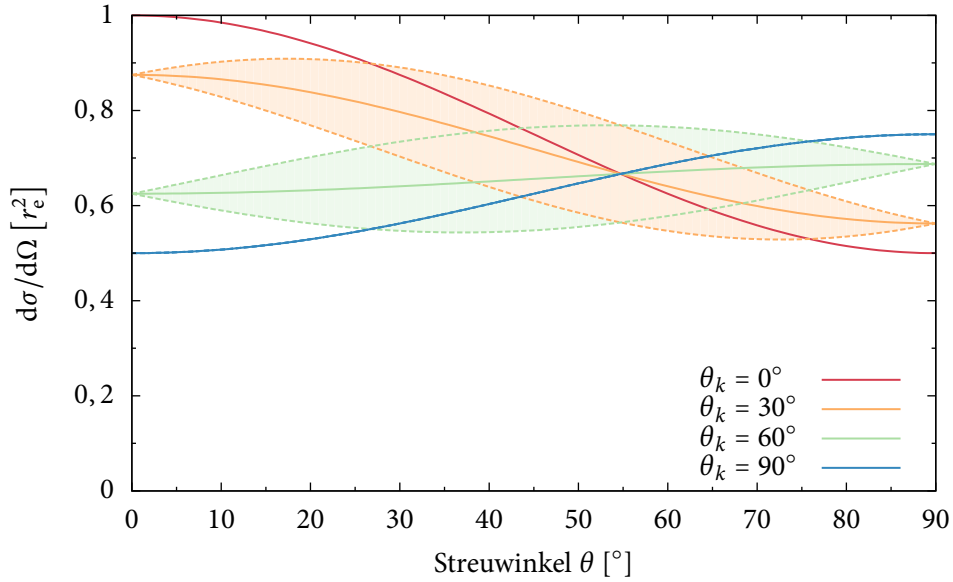
#### 5.4 Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation



**Abbildung 5.3:** Differentieller Wirkungsquerschnitt  $d\sigma_{2\text{int}}/d\Omega$  für  $\Delta m = 2$ ,  $\delta = 0$  und  $\Lambda = 1$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dies ist sowohl für  $\theta \in [0, \pi]$  als auch für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  gültig, da für  $\Delta m = 2$  die Beziehung  $d\sigma_{\text{int}}/d\Omega(\theta, \varphi) = d\sigma_{\text{int}}/d\Omega(\pi - \theta, \varphi)$  gilt, während  $d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega(\theta) = d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega(\pi - \theta)$  ist und  $d\sigma_{\text{tw}}/d\Omega$  nicht von  $\varphi$  abhängt).

### 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$

$\cos \tilde{\delta} = \pm 1$  (unterbrochene Linien) zum Vergleich dargestellt. Der Fall  $\cos \tilde{\delta} = 1$  entspricht den Azimutalwinkeln  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$  (für  $\Delta m = 1$ ) bzw.  $\varphi = \frac{\pi - \delta}{2}$  (für  $\Delta m = 2$ ), der Fall  $\cos \tilde{\delta} = -1$  den Azimutalwinkeln  $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \delta$  ( $\Delta m = 1$ ) bzw.  $\varphi = -\frac{\delta}{2}$  ( $\Delta m = 2$ ).

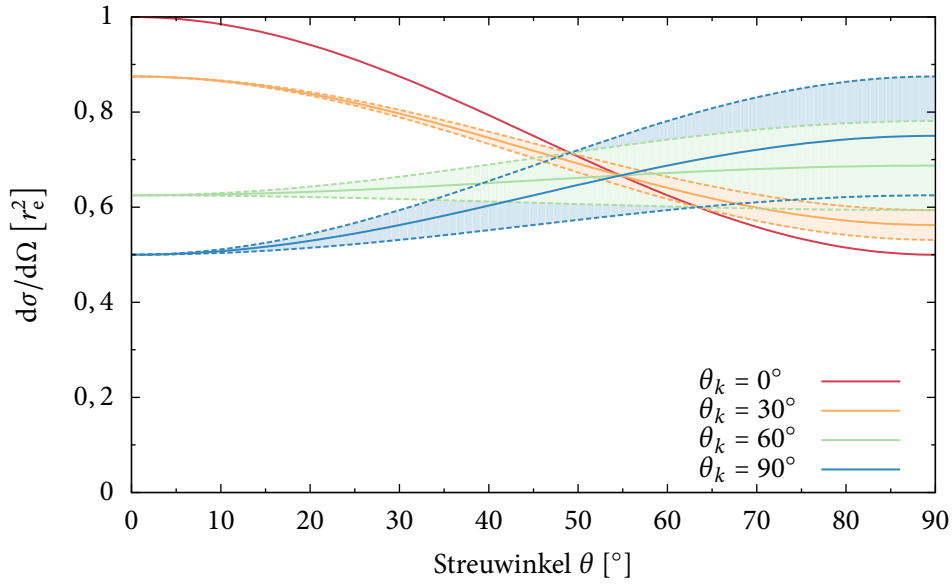


**Abbildung 5.4:** Differentieller Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  für  $\Delta m = 1$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Der Wirkungsquerschnitt bewegt sich, in Abhängigkeit von  $\varphi$  und  $\delta$ , zwischen den mit unterbrochenen Linien dargestellten Graphen: Die obere unterbrochene Kurve stellt das Maximum der Verteilung für einen bestimmten Streuwinkel  $\theta$  dar. Für welchen Azimutalwinkel  $\varphi$  dieses Maximum angenommen wird, hängt von dem Parameter  $\delta$  ab. Analog stellt die untere unterbrochene Kurve das jeweilige Minimum dar. Die durchgezogene Kurve stellt den Fall für einen einzelnen Bessel-Strahl dar und ist zum Vergleich angegeben. Es ist nur der Bereich  $\theta \in [0, 90^\circ]$  dargestellt, da der abgebildete Graph spiegelsymmetrisch bezüglich  $\theta = 90^\circ$  ist.

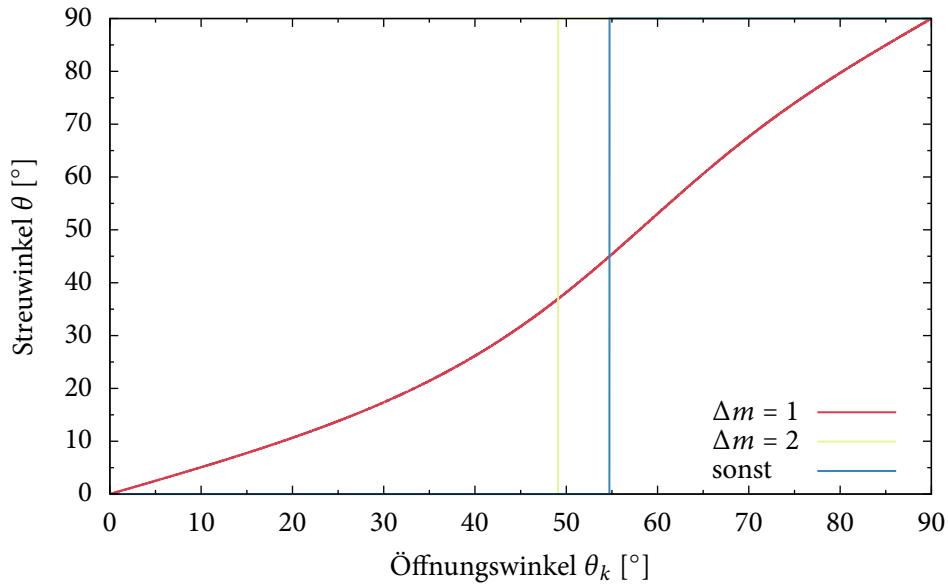
Für  $\Delta m = 1$  ist der Interferenzterm (5.14) proportional zu  $\cos \theta_k \sin \theta_k = \frac{1}{2} \sin(2\theta_k)$ , dementsprechend ist er für  $\theta_k = 45^\circ$  am stärksten. Im Grenzfall  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  verschwindet der Interferenzterm. Für  $\Delta m = 2$  dagegen wächst der Interferenzterm mit steigendem  $\theta_k$ , da er proportional zu  $\sin^2 \theta_k$  ist.

Der Streuwinkel  $\theta$ , für den das Maximum der Winkelverteilung angenommen wird, ist vom Öffnungswinkel  $\theta_k$  abhängig. Für  $\Delta m \notin \{1, 2\}$  liegt das Maximum für  $\theta_k < \theta_m$  stets bei  $\theta = 0$  bzw.  $180^\circ$ , für  $\theta_k > \theta_m$  bei  $\theta = 90^\circ$ . Für  $\Delta m = 2$  erhält man ein ähnliches Verhalten, unterhalb eines bestimmten Öffnungswinkels liegt das Maximum bei  $\theta = 0$  bzw.  $180^\circ$ , für größere Öffnungswinkel bei  $\theta = 90^\circ$ . Der entsprechende Öffnungswinkel, bei dem der Übergang stattfindet, beträgt  $\theta_k \approx 49,1^\circ$ . Für  $\Delta m = 1$  dagegen lässt sich der Streuwinkel  $\theta$ , bei dem das Maximum der Verteilung angenommen wird, über die Wahl des Öffnungswinkels  $\theta_k$  kontinuierlich einstellen. Der entsprechende Zusammenhang ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

#### 5.4 Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation



**Abbildung 5.5:** Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $\Delta m = 2$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Die Darstellung ist analog zu Abbildung 5.4.



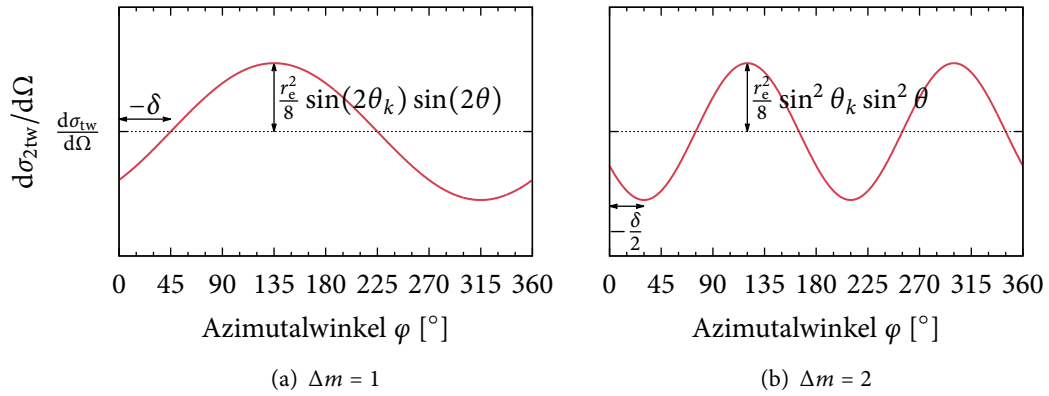
**Abbildung 5.6:** Streuwinkel  $\theta$ , bei dem das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnitts  $d\sigma_{2tw}/d\Omega$  angenommen wird, in Abhängigkeit des Öffnungswinkels  $\theta_k$ . Für  $\Delta m \neq 1$  befindet sich das Maximum der Winkelverteilung jeweils für kleine Öffnungswinkel bei  $\theta = 0$ , für große Öffnungswinkel bei  $\theta = 90^\circ$ . Der Öffnungswinkel, bei dem der Übergang stattfindet, beträgt  $\theta_k \approx 49,1^\circ$  für  $\Delta m = 2$ , ansonsten  $\theta_k = \theta_m$ . Für  $\Delta m = 1$  lässt sich der Streuwinkel, bei welchem das Maximum angenommen wird, kontinuierlich einstellen.

### 5.4.2 Winkelverteilung bei festem Streuwinkel $\theta$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist von der Form  $d\sigma_{2tw}/d\Omega = A(\theta_k, \theta) + \cos \tilde{\delta} \cdot B(\theta_k, \theta)$ . Für einen festen Streuwinkel  $\theta$  entspricht die Verteilung der Strahlung über den Azimutalwinkel also stets einer verschobenen Kosinusfunktion. Für die betrachteten Fälle  $\Delta m = 1$  und  $\Delta m = 2$  gilt

$$\cos \tilde{\delta} = \begin{cases} \sin(\varphi + \delta), & \Delta m = 1, \\ -\cos(2\varphi + \delta), & \Delta m = 2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Daraus erhält man die in Abbildung 5.7 dargestellten Verteilungen über den Azimutalwinkel  $\varphi$  für einen bestimmten Streuwinkel  $\theta$  und Öffnungswinkel  $\theta_k$ .



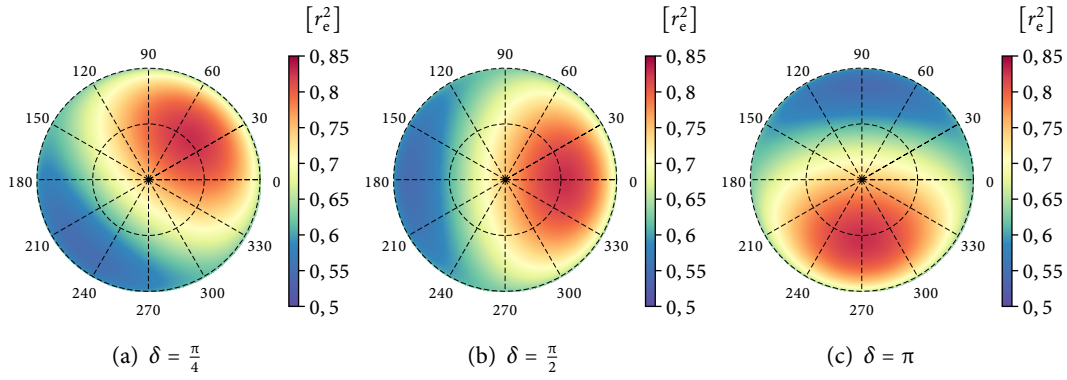
**Abbildung 5.7:** Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts  $d\sigma_{2tw}/d\Omega$  vom Azimutalwinkel  $\varphi$  des gestreuten Photons für die Fälle  $\Delta m = 1$  und  $\Delta m = 2$ . Wie man sieht, lässt sich durch Manipulation von  $\delta$  die Phase der Kosinusfunktion, und damit die Lage der Maxima und Minima, verschieben.

Wie somit leicht ersichtlich ist, lässt sich über den Parameter  $\delta$  steuern, bei welchem Azimutalwinkel  $\varphi$  die Maxima oder Minima der Verteilung liegen. Um dies zu veranschaulichen, sind in Abbildung 5.8 ( $\Delta m = 1$ ) und Abbildung 5.9 ( $\Delta m = 2$ ) die Winkelverteilungen für verschiedene Phasendifferenzen  $\delta$  dargestellt. Für die Darstellung wurde jeweils derjenige Öffnungswinkel gewählt, bei dem der Effekt am stärksten auftritt, also der Interferenzterm am größten ist ( $\theta_k = 45^\circ$  für  $\Delta m = 1$ ,  $\theta_k = 90^\circ$  für  $\Delta m = 2$ ).

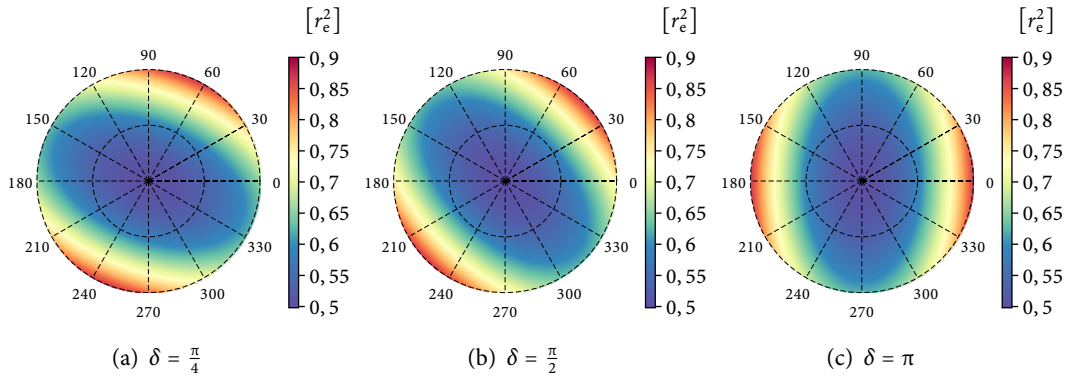
Das erhaltene Ergebnis, dass man die Winkelverteilung mittels Manipulation von  $\delta$  um die  $z$ -Achse „drehen“ kann, ist plausibel, da durch jene Manipulation auch die auch die transversale Intensitätsverteilung um die  $z$ -Achse gedreht wird, wie man an Gl. (5.6) leicht abliest.



#### 5.4 Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation



**Abbildung 5.8:** Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $\Delta m = 1$ ,  $\theta_k = 45^\circ$  und  $\Lambda = 1$  für verschiedene relative Phasen  $\delta$ . Die Darstellung ist analog zu Abbildung 5.4. Wie man sieht, lässt sich die Winkelverteilung durch Manipulation von  $\delta$  um die  $z$ -Achse drehen.



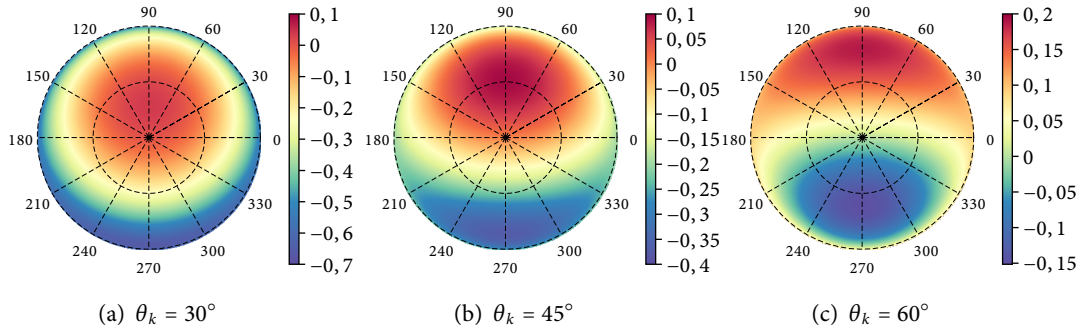
**Abbildung 5.9:** Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $\Delta m = 2$ ,  $\theta_k = 90^\circ$  und  $\Lambda = 1$  für verschiedene relative Phasen  $\delta$ . Die Darstellung ist analog zu Abbildung 5.5. Wie man sieht, lässt sich die Winkelverteilung durch Manipulation von  $\delta$  um die  $z$ -Achse drehen.

### 5.4.3 Polarisation der gestreuten Strahlung

Die Polarisation wird hier für den Fall  $\delta = 0$ ,  $\Lambda = 1$  diskutiert. Die Graphen für andere Werte von  $\delta$  ergeben sich erwartungsgemäß wieder durch entsprechende Drehung um die  $z$ -Achse, wie dies schon bei der Winkelverteilung der Fall ist. Über den Parameter  $\tilde{\delta}$  hängen die Stokes-Parameter auch von dem Azimutalwinkel  $\varphi$  des gestreuten Photons ab. Die Helizität  $\Lambda$  geht abermals nur als Vorzeichen in den Parameter  $\tilde{P}_3$  ein.

#### Der Fall $\Delta m = 1$

Der Parameter  $\tilde{P}_1$ , welcher den Anteil parallel bzw. senkrecht zur Streuebene linear polarisierter Strahlung beschreibt, ist in Abbildung 5.10 exemplarisch für drei verschiedene Öffnungswinkel dargestellt.

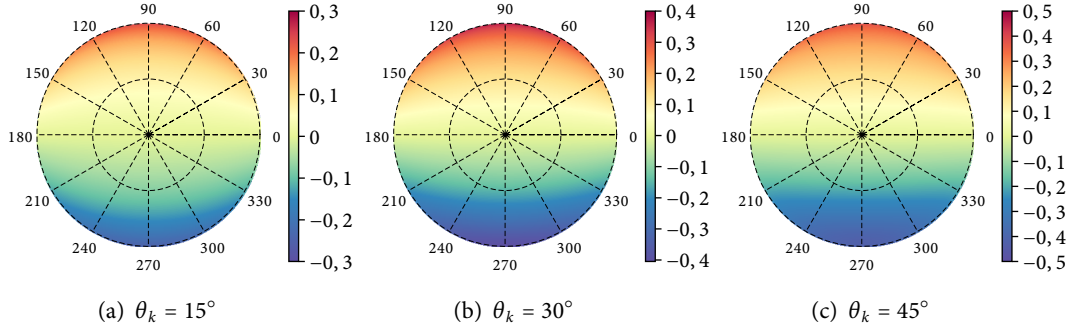


**Abbildung 5.10:** Stokes-Parameter  $\tilde{P}_1$  für  $\Delta m = 1$ ,  $\Lambda = 1$  und die Öffnungswinkel  $\theta_k = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $60^\circ$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (Rückwärtsstreuung) werden die Graphen um  $180^\circ$  gedreht). Der Vergleich mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (siehe Abbildung 5.2(c), 5.2(d) und 5.2(f)) zeigt, dass der Stokes-Parameter  $\tilde{P}_1$  dort groß ist, wo auch der differentielle Wirkungsquerschnitt groß ist. Dabei ist das Vorzeichen von  $\tilde{P}_1$  zu beachten.

Der Parameter  $\tilde{P}_1$  verhält sich für  $\Delta m = 1$  ähnlich wie im Fall eines einzelnen Bessel-Strahls: In Bereichen mit großem differentiellen Wirkungsquerschnitt ist  $\tilde{P}_1$  groß, in Bereichen mit geringem differentiellen Wirkungsquerschnitt geringer. Dabei ist das Vorzeichen zu beachten: Für kleine Öffnungswinkel  $\theta_k$  ist  $\tilde{P}_1$  vorwiegend negativ, was Polarisation parallel zur Streuebene entspricht, für größere Öffnungswinkel vermehrt positiv, was Polarisation senkrecht zur Streuebene entspricht. Dies ist ähnlich dem Fall eines einzelnen Bessel-Strahls, jedoch finden sich nun Bereiche mit positivem und negativem  $\tilde{P}_1$  in einem Graphen, während für einen einzelnen Bessel-Strahl die Strahlung immer entweder parallel oder senkrecht zur Streuebene polarisiert war (vgl. Abbildung 4.2). In den Grenzfällen  $\theta_k = 0$  und  $\theta_k = 90^\circ$  verschwindet der Interferenzterm, man erhält das gleiche Ergebnis wie für einen einzelnen Bessel-Strahl (siehe Kapitel 4).

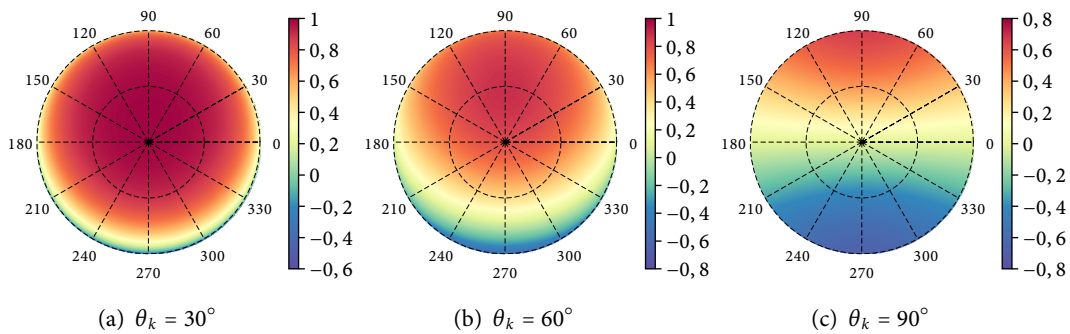
#### 5.4 Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation

Schon bei Betrachtung der Formeln fällt auf, dass nun  $\tilde{P}_2$  nicht mehr grundsätzlich verschwindet; der Anteil linear polarisierter Strahlung ist also nicht mehr unbedingt parallel oder senkrecht zur Streuebene polarisiert. Für  $\Delta m = 1$  ist der Parameter  $\tilde{P}_2$  proportional zu  $\cos \theta_k \sin \theta_k$ , wird also für  $\theta_k = 45^\circ$  maximal. In Abbildung 5.11 ist er für die Öffnungswinkel  $\theta_k = 15^\circ, 30^\circ$  und  $45^\circ$  dargestellt. Für  $\theta_k = 0$  und  $\theta_k = 90^\circ$  verschwindet der Parameter.



**Abbildung 5.11:** Stokes-Parameter  $\tilde{P}_2$  für  $\Delta m = 1$ ,  $\Lambda = 1$  und die Öffnungswinkel  $\theta_k = 15^\circ, 30^\circ$  und  $45^\circ$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (Rückwärtsstreuung) werden die Graphen negiert und um  $180^\circ$  gedreht, was die Verteilung jedoch insgesamt nur geringfügig beeinflusst). Der Parameter  $\tilde{P}_2$  ist für  $\theta_k = 45^\circ$  maximal und verschwindet für  $\theta_k = 0$  und  $\theta_k = 90^\circ$ .

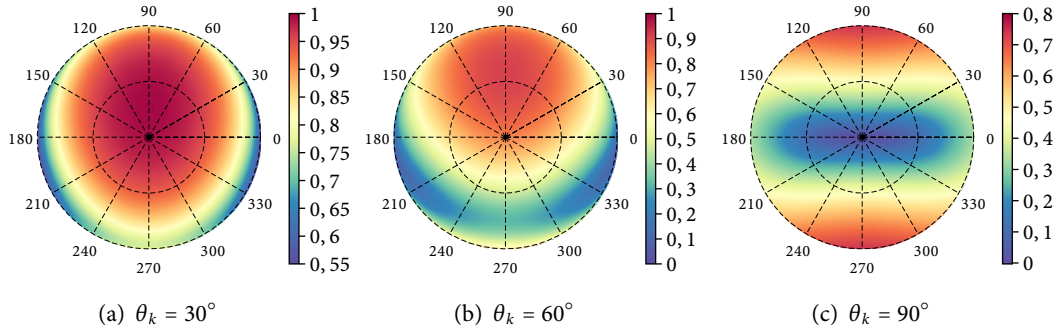
Die zirkulare Polarisation, charakterisiert durch den Stokes-Parameter  $\tilde{P}_3$ , besitzt für  $\Delta m = 1$ , vor allem für größere Öffnungswinkel  $\theta_k$ , den größeren Anteil an der Strahlung, da die Parameter  $\tilde{P}_1$  und  $\tilde{P}_2$  für größere Öffnungswinkel betragsmäßig kleiner werden, während  $\tilde{P}_3$  zumindest in einigen Bereichen betragsmäßig relativ groß ( $> 0,7$ ) bleibt. In Abbildung 5.12 ist  $\tilde{P}_3$  für die Öffnungswinkel  $\theta_k = 30^\circ, 60^\circ$  und den Grenzfall  $90^\circ$  dargestellt.



**Abbildung 5.12:** Stokes-Parameter  $\tilde{P}_3$  für  $\Delta m = 1$ ,  $\Lambda = 1$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (Rückwärtsstreuung) werden die Graphen negiert und um  $180^\circ$  gedreht). Wie man sieht, sind die maximalen Werte für  $\tilde{P}_3$  stets relativ groß, sodass bei größeren Öffnungswinkeln die zirkulare Polarisation überwiegt.

## 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$

Der Polarisationsgrad  $\Pi$  ist in Abbildung 5.13 für die Öffnungswinkel  $\theta_k = 30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  dargestellt. Er ist in gewissen Bereichen auch für  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  noch relativ hoch, was hauptsächlich an der zirkularen Polarisation liegt. Für geringe Öffnungswinkel liegen die Bereiche maximalen Polarisationsgrades noch bei kleinen Streuwinkeln, für größere Öffnungswinkel wandern diese zu Streuwinkeln um  $90^\circ$ . Im Extremfall  $\theta_k = 90^\circ$  (siehe Abbildung 5.13(c)) wird dies besonders deutlich. In diese Bereiche werden auch die meisten Photonen gestreut, wie der Vergleich mit der entsprechenden Winkelverteilung (siehe Abbildung 5.2) zeigt.



**Abbildung 5.13:** Polarisationsgrad  $\Pi$  für  $\Delta m = 1$ ,  $\Lambda = 1$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (Rückwärtsstreuung) werden die Graphen um  $180^\circ$  gedreht). Wie man sieht, liegen die Bereiche maximalen Polarisationsgrades für kleinere Öffnungswinkel bei Streuwinkeln um  $0^\circ$ , für größere Öffnungswinkel wandern sie zu  $\theta = 90^\circ$ .

### Der Fall $\Delta m = 2$

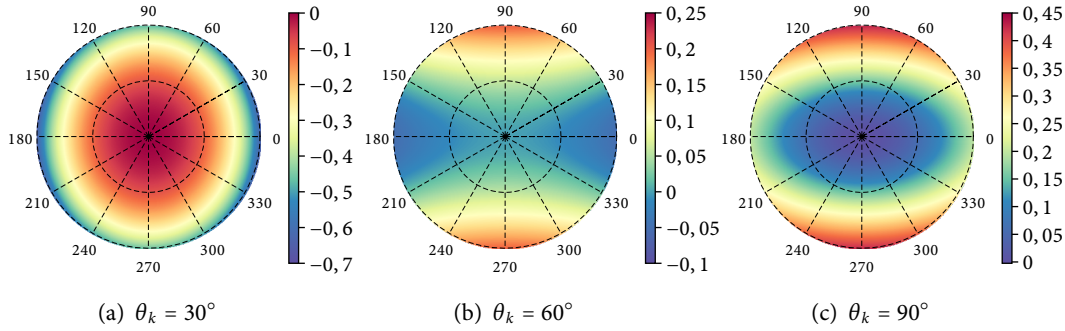
Der Parameter  $\tilde{P}_1$  ist in Abbildung 5.14 für  $\Delta m = 2$  und verschiedene Öffnungswinkel dargestellt. Er zeigt ein ähnliches Verhalten wie für  $\Delta m = 1$ : Die Bereiche, in denen er am größten ist, fallen mit denen des größten differentiellen Wirkungsquerschnittes zusammen, wie ein Vergleich mit den entsprechenden Graphen (Abbildung 5.3(c), 5.3(f) und 5.3(h)) zeigt.

Der Parameter  $\tilde{P}_2$  verschwindet auch für  $\Delta m = 2$  nicht generell. In Abbildung 5.15 ist er für verschiedene Öffnungswinkel dargestellt, dabei ergibt sich stets ein charakteristisches Muster. Für  $\Delta m = 2$  ist  $\tilde{P}_2$  proportional zu  $\sin^2 \theta_k$ , wird also im Grenzfall  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  am größten.

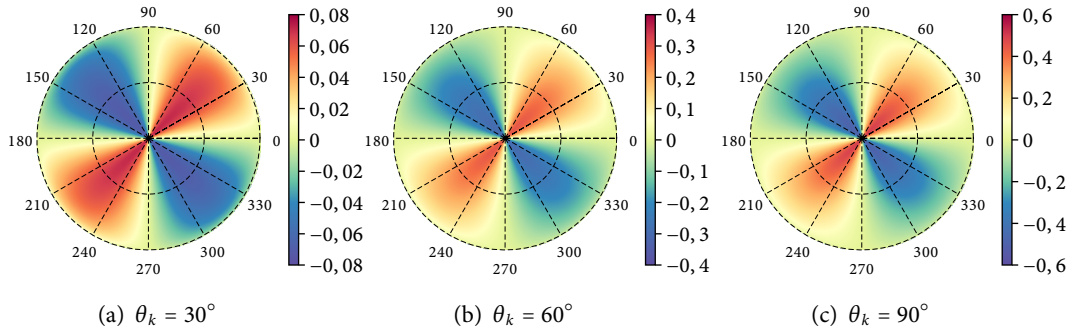
Der Parameter  $\tilde{P}_3$  ist für  $\Delta m = 3$  und verschiedene Öffnungswinkel in Abbildung 5.16 dargestellt. Dabei erkennt man, dass das Maximum unabhängig vom Öffnungswinkel  $\theta_k$  stets bei  $\theta = 0$  liegt, das Minimum entsprechend bei  $\theta = 180^\circ$  (für  $\Lambda = 1$ ). Im Gegensatz zu  $\Delta m = 1$  (siehe Abbildung 5.12(c)) verschwindet  $\tilde{P}_3$  für  $\theta_k = 90^\circ$  vollständig, wie im Fall eines einzelnen Bessel-Strahls (vgl. Abbildung 4.3).

Der Polarisationsgrad  $\Pi$  ist in Abbildung 5.17 für  $\Delta m = 2$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$  dargestellt. Im Unterschied zum Fall  $\Delta m = 1$  ist die Polarisation für sehr große  $\theta_k$  hauptsächlich

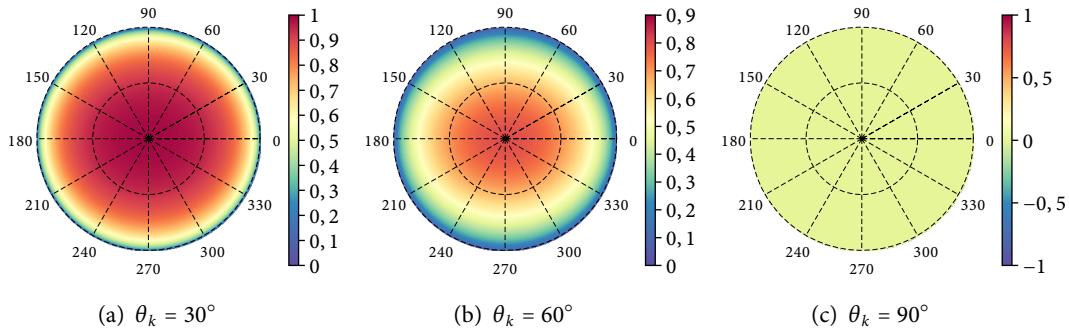
#### 5.4 Einfluss der Parameter des Strahls auf Winkelverteilung und Polarisation



**Abbildung 5.14:** Stokes-Parameter  $\tilde{P}_1$  für  $\Delta m = 2$ ,  $\Lambda = 1$  und die Öffnungswinkel  $\theta_k = 30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (sowohl für  $\theta \in [0, \pi]$  als auch für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ ).



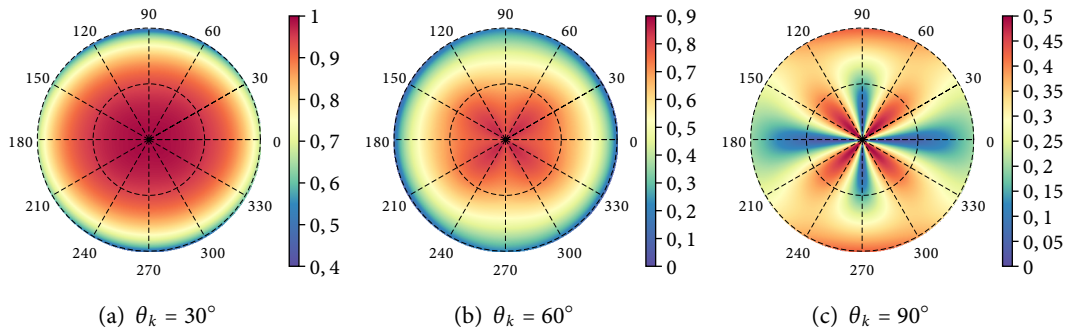
**Abbildung 5.15:** Stokes-Parameter  $\tilde{P}_2$  für  $\Delta m = 2$ ,  $\Lambda = 1$  und die Öffnungswinkel  $\theta_k = 30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (Rückwärtsstreuung) werden die Graphen negiert). Der Parameter  $\tilde{P}_2$  ist für  $\theta_k = 90^\circ$  maximal und weist eine charakteristische Struktur auf, die sich mit wachsendem Öffnungswinkel qualitativ nur geringfügig verändert.



**Abbildung 5.16:** Stokes-Parameter  $\tilde{P}_3$  für  $\Delta m = 2$ ,  $\Lambda = 1$  und die Öffnungswinkel  $\theta_k = 30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (dargestellt für  $\theta \in [0, \pi]$ , für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (Rückwärtsstreuung) werden die Graphen negiert). Der Parameter  $\tilde{P}_3$  ist stets für  $\theta = 0$  maximal (im Fall  $\Lambda = 1$ ), im Grenzfall  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  verschwindet er.

## 5 Superposition zweier Bessel-Strahlen mit gleichem Öffnungswinkel $\theta_k$

linear, da der Anteil der zirkularen Polarisation im Grenzwert  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  (siehe Abbildung 5.16(c)) verschwindet und  $\tilde{P}_2$  dafür mit steigendem  $\theta_k$  wächst (siehe Abbildung 5.15(c)). Auch fallen die Bereiche maximalen Polarisationsgrades für große  $\theta_k$  nicht mit denen des größten differentiellen Wirkungsquerschnitts zusammen (vgl. insbesondere Abbildung 5.17(c) mit Abbildung 5.3(h)).



**Abbildung 5.17:** Polarisationsgrad  $\Pi$  für  $\Delta m = 2$ ,  $\Lambda = 1$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\theta_k$ . Die radiale Achse entspricht  $\sin \theta$  (sowohl für  $\theta \in [0, \pi]$  als auch für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ ). Wie man sieht, liegen die Bereiche maximalen Polarisationsgrades für kleinere Öffnungswinkel bei Streuwinkeln um  $0^\circ$ , die zirkulare Polarisation dominiert diesen Bereich. Im Grenzfalle  $\theta_k \rightarrow 90^\circ$  dominiert die lineare Polarisation, die zirkulare Polarisation verschwindet, wie die Analyse der Stokes-Parameter zeigt.

## 6 Schlussfolgerungen und Ausblick

Die Zielsetzung bei der Untersuchung der Thomson-Streuung von Twisted Light war es, herauszufinden ob sich die Winkelverteilung des gestreuten Lichts durch Variation der Parameter des eintreffenden Strahls gezielt beeinflussen lässt. Zusätzlich wurden die Stokes-Parameter der gestreuten Strahlung berechnet, um deren Polarisationsseigenschaften zu charakterisieren.

Für einen Twisted Photon mit einer wohldefinierten Helizität wurde lediglich eine Abhängigkeit vom Öffnungswinkel  $\theta_k$  festgestellt, die topologische Ladung  $m$  hat keinen Einfluss auf Winkelverteilung und Polarisation. Dies steht in Einklang mit der Literatur. Es wurde festgestellt, dass bei größerem Öffnungswinkel die Zahl der senkrecht ( $\theta \approx 90^\circ$ ) gestreuten Photonen zunimmt, während die Zahl der vor- und rückwärtsgestreuten Photonen ( $\theta \approx 0^\circ, 180^\circ$ ) abnimmt. Wenn der Öffnungswinkel des Bessel-Strahls dabei dem magischen Winkel  $\theta_m \approx 54,7^\circ$  entspricht, ist die gestreute Strahlung gleichförmig über alle Raumwinkel verteilt. Zudem enthält die gestreute Strahlung in diesem Fall nur zirkular polarisierte Anteile (deren Anteil und Helizität allerdings mit dem Streuwinkel variiert), während für die übrigen Öffnungswinkel auch Anteile linearer Polarisation vorhanden sind.

Weiterhin wurde die Streuung für eine Superposition zweier Strahlen mit unterschiedlicher topologischer Ladung untersucht, da sich hierdurch eine Abhängigkeit von der Differenz  $\Delta m$  der beiden topologischen Ladungen ergeben sollte. Hierbei wurde festgestellt, dass sich ein solcher Effekt nur für  $\Delta m = 1$  oder  $\Delta m = 2$  einstellt, in den anderen Fällen erhält man das Ergebnis für einen einzelnen Strahl mit wohldefinierter topologischer Ladung. Dieses Verhalten weicht erheblich von den Ergebnissen für die von Seipt, Surzhykov und Fritzsche [1] untersuchte inverse Compton-Streuung mit Twisted Electrons ab.

Für  $\Delta m \in \{1, 2\}$  erhält man eine Winkelverteilung, die nicht nur vom Streuwinkel  $\theta$ , sondern auch vom Azimutalwinkel  $\varphi$  der gestreuten Photonen abhängt. Dabei ergeben sich Szenarien, in denen die Photonen bevorzugt in zwei entgegengesetzte Richtungen gestreut werden, d. h.  $(\theta, \varphi)$  und  $(180^\circ - \theta, 180^\circ + \varphi)$ . Dabei lässt sich für  $\Delta m = 1$  der Streuwinkel  $\theta$ , bei dem das Maximum der Verteilung liegt, durch Manipulation des Öffnungswinkels  $\theta_k$  kontinuierlich einstellen. Der entsprechende Azimutalwinkel  $\varphi$  lässt sich durch die relative Phase  $\delta$  der beiden überlagerten Photonen steuern.

Das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnitts ist bei allen Szenarien typischerweise um den Faktor 1,5 bis 2 größer als das Minimum.



## 6 Schlussfolgerungen und Ausblick

Insgesamt kann die Winkelverteilung zwar durchaus effektiv beeinflusst werden, allerdings nicht in dem Maße wie bei der erwähnten inversen Compton-Streuung mit Twisted Electrons. Zudem sind für eine signifikante Manipulation der Winkelverteilung teilweise Bessel-Strahlen mit sehr großen Öffnungswinkeln nötig.

Die qualitativen Unterschiede zwischen den hier ermittelten Winkelverteilungen und denjenigen für die inverse Compton-Streuung mit Twisted Electrons lassen sich durch die hier erfolgte nicht-relativistische Betrachtung erklären: Da die Elektronen in den von Seipt, Surzhykov und Fritzsche untersuchten Szenarien relativistische Energien aufweisen, übertragen sie einen Teil ihres Impulses auf die Photonen, weshalb diese in einen Kegel gestreut werden, dessen Öffnungswinkel dem des Bessel-Strahls der Elektronen entspricht. Daher wäre es interessant, die Streuung von Twisted Light auch an relativistischen Elektronen zu untersuchen, um zu sehen, ob sich äquivalente Resultate ergeben.

Weiterhin böte es sich an, einen Elektronenstrahl mit lateraler Struktur zu betrachten, in dem Sinne, dass die Elektronen (mit einer gewissen Ortsunschärfe) an einer bestimmten Stelle auf dem Strahlquerschnitt „platziert“ sind. Dies bietet weitere Freiheitsgrade, durch deren geschickte Wahl sich evtl. Winkelverteilungen ergeben, die sich von den hier erhaltenen wesentlich unterscheiden. Außerdem wurden an dieser Stelle nur Strahlen mit wohlbestimmter Helizität  $\Lambda$  betrachtet, also zirkular polarisiertes Licht. Die Streuung mittels andersweitig polarisierter Bessel-Strahlen stellt eine weitere mögliche Ergänzung der hier durchgeführten Untersuchungen dar.



# Anhang

## A.1 Verwendete Symbole/Konventionen

Bei den Berechnungen kommen die folgenden Konventionen zum Einsatz:

- Hüte kennzeichnen Einheitsvektoren, z. B.  $\hat{\mathbf{e}}_x$ ,
- umgedrehte Hüte kennzeichnen Operatoren, z. B.  $\check{H}$ .
- Sofern es sich nicht um eine Summationsvariable handelt, beschreibt ein Index  $i$  („initial“) den Wert einer physikalischen Größe im Anfangszustand und  $f$  („final“) im Endzustand des Systems.
- Der Buchstabe  $\sigma$  bezeichnet den Polarisationszustand eines Photons, der z. B. durch einen Jones-Vektor repräsentiert werden kann. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird mit  $d\sigma/d\Omega$  bezeichnet, während der totale Wirkungsquerschnitt zur Vermeidung der Verwechslung mit  $\sigma_{\text{tot}}$  bezeichnet wird.

## A.2 Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes ist in vielen Lehrbüchern beschrieben. Der Vollständigkeit halber wird die Herleitung hier kurz zusammengefasst.

Das klassische elektromagnetische Feld im Vakuum wird durch die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathcal{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathcal{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathcal{B} &= 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

beschrieben. Zur Lösung führt man das skalare Potential  $\phi$  und das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ein:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathcal{B} = \nabla \times \mathbf{A}.\tag{A.2}$$

Bei der Wahl der Potentiale besteht eine Eichfreiheit, wir verwenden die sogenannte *Coulomb-Eichung*

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \phi(\mathbf{x}, t) = 0.\tag{A.3}$$

## Anhang

Es folgt eine Wellengleichung für das Vektorpotential:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Zur Lösung der Gleichung wählt man ein kubisches Volumen  $V = L^3$  mit periodischen Randbedingungen und den Ansatz  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ . Lösungen sind die Normalmoden

$$\mathbf{A}_{k\sigma} = N_k \hat{\mathbf{e}}_{k\sigma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.5})$$

wobei die Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  aufgrund des endlichen Volumens nur diskrete Werte annehmen können ( $\frac{L}{2\pi} \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ ) und betragsmäßig über  $k = \omega/c$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  zusammenhängen. Die Polarisationsvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_{k\sigma}$  zu einem Polarisationszustand  $\sigma$  stehen senkrecht auf dem jeweiligen Wellenvektor,  $\hat{\mathbf{e}}_{k\sigma} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Bei der Größe  $N_k$  handelt es sich um eine von  $k = |\mathbf{k}|$  abhängige Normierungskonstante. Nun lässt sich ein beliebiges Vektorpotential, das die Coulomb-Eichung (A.3) erfüllt, als Fourierentwicklung der Normalmoden darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, \sigma} [a_{k\sigma} \mathbf{A}_{k\sigma}(\mathbf{x}) + a_{k\sigma}^* \mathbf{A}_{k\sigma}^*(\mathbf{x})] \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \sigma} N_k [\hat{\mathbf{e}}_{k\sigma} a_{k\sigma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_{k\sigma}^* a_{k\sigma}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Dabei wird über alle erlaubten Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  und über zwei orthogonale Polarisationszustände  $\sigma$  summiert. Mit den Entwicklungskoeffizienten  $a_{k\sigma}$  erhält man für die Energie des elektromagnetischen Feldes den Ausdruck

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 \mathbf{x} \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{8\pi} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{k^2}{4\pi} N_k^2 L^3 [a_{k\sigma} a_{k\sigma}^* + a_{k\sigma}^* a_{k\sigma}]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Vergleicht man dies mit der Energie von quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren,

$$\check{H} = \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} [\check{a}_i \check{a}_i^\dagger + \check{a}_i^\dagger \check{a}_i], \quad (\text{A.8})$$

so erkennt man, dass beide Ausdrücke die selbe Struktur besitzen. Daher ersetzt man die Fourierkoeffizienten durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\check{a}_{k\sigma}, \check{a}_{k\sigma}^\dagger$ . Damit die Energien übereinstimmen, setzt man  $N_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{L^3 k}}$ . Die einzelnen Photonen werden also als Anregungszustände der sogenannten Feldoszillatoren beschrieben: Der Grundzustand entspricht keinem Photon des entsprechenden Wellenvektors und Polarisationszustandes, durch den Erzeugungsoper-

## A.2 Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

rator wird die Anzahl der entsprechenden Photonen um 1 erhöht, durch den Vernichtungsoperator um 1 vermindert. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wirken auf die Besetzungszustände (die Anregungszustände der Feldoszillatoren),

$$\check{a}_{k\sigma}|n_{k\sigma}\rangle = \sqrt{n_{k\sigma}}|n_{k\sigma}-1\rangle, \quad \check{a}_{k\sigma}^\dagger|n_{k\sigma}\rangle = \sqrt{n_{k\sigma}+1}|n_{k\sigma}+1\rangle, \quad (\text{A.9})$$

und erfüllen die bekannten Kommutatorregeln

$$[\check{a}_{k\sigma}, \check{a}_{k'\sigma'}] = [\check{a}_{k\sigma}^\dagger, \check{a}_{k'\sigma'}^\dagger] = 0, \quad [\check{a}_{k\sigma}, \check{a}_{k'\sigma'}^\dagger] = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}. \quad (\text{A.10})$$

Der Besetzungszahloperator  $\check{N}_{k\sigma} = \check{a}_{k\sigma}^\dagger \check{a}_{k\sigma}$  zählt die Anzahl der Photonen eines Wellenvektors und Polarisationszustandes:

$$\check{N}_{k\sigma}|n_{k\sigma}\rangle = n_{k\sigma}|n_{k\sigma}\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Der Operator des Vektorpotentials ergibt sich so zu

$$\check{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{L^3 k}} [\hat{\mathbf{e}}_{k\sigma} \check{a}_{k\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_{k\sigma}^* \check{a}_{k\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (\text{A.12})$$

Im folgenden Absatz wird der Grenzwert  $V \rightarrow \infty$  betrachtet, um kontinuierliche Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  zuzulassen. Dies ist notwendig, da die Bessel-Strahlen als kontinuierliche Superposition ebener Wellen beschrieben werden. In den Lehrbüchern von Greiner [14] und Sakurai [15] wird diese Betrachtung unterlassen, die entsprechende Normierung im Grenzwert wurde daher dem Werk von Vogel und Welsch [19] entnommen.

Um kontinuierliche Wellenvektoren beschreiben zu können, wählt man ein unendliches Volumen. Im Grenzwert  $V \rightarrow \infty$  werden die Summen über die Wellenvektoren zu Integralen und die diskreten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ersetzt man durch kontinuierliche Varianten  $\check{a}_\sigma(\mathbf{k})$  gemäß [19, S. 27]

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} L^3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad \text{und} \quad \check{a}_{\mathbf{k}, \sigma} \rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \check{a}_\sigma(\mathbf{k}). \quad (\text{A.13})$$

Für die neu definierten, kontinuierlichen Leiteroperatoren gelten die Kommutatorregeln

$$[\check{a}_\sigma(\mathbf{k}), \check{a}_{\sigma'}(\mathbf{k}')] = [\check{a}_\sigma^\dagger(\mathbf{k}), \check{a}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0, \quad [\check{a}_\sigma(\mathbf{k}), \check{a}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\sigma\sigma'}. \quad (\text{A.14})$$

Das Vektorpotential für kontinuierliche Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  ergibt sich mit diesen Operatoren zu

$$\check{A}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \sum_{\sigma} [\hat{\mathbf{e}}_\sigma(\mathbf{k}) \check{a}_\sigma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma^*(\mathbf{k}) \check{a}_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (\text{A.15})$$

### A.3 Berechnung der Ortswellenfunktion eines Bessel-Strahls

Zur Berechnung der normierten Ortswellenfunktion  $\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z)$  für ein Twisted Photon verwendet man die Entwicklung nach ebenen Wellen (siehe Gl. (2.49)) und setzt die Ortswellenfunktion (2.21) für ebene Wellen ein:

$$\begin{aligned}\psi_{\kappa k_z m}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | \kappa, k_z, m, \Lambda \rangle \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} a_{\kappa m}(\mathbf{k}_\perp) \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z, \Lambda \rangle \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} (-i)^m e^{im\varphi_k} \delta(k_\perp - \kappa) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \mathbf{x}}.\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

In Zylinderkoordinaten  $\mathbf{x} = (r_\perp, \varphi, z)$  ist

$$(\mathbf{k}_\perp + k_z \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \mathbf{x} = k_\perp r_\perp \cos(\varphi_k - \varphi) + k_z z. \quad (\text{A.17})$$

Mit  $\int d^2 \mathbf{k}_\perp = \int dk_\perp k_\perp \int d\varphi_k$  wird dies zu

$$\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa V}} (-i)^m \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_\perp k_\perp \int d\varphi_k e^{im\varphi_k} \delta(k_\perp - \kappa) e^{ik_\perp r_\perp \cos(\varphi_k - \varphi)} e^{ik_z z}. \quad (\text{A.18})$$

Nach Ausführen des Integrals über  $k_\perp$  erhält man

$$\begin{aligned}\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) &= \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa V}} \frac{\kappa}{2\pi} (-i)^m \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_k e^{im\varphi_k} e^{i\kappa r_\perp \cos(\varphi_k - \varphi)} e^{ik_z z} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} (-i)^m e^{ik_z z} \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_k e^{i[m\varphi_k + \kappa r_\perp \cos(\varphi_k - \varphi)]}.\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

Mit der Substitution  $\tilde{\varphi}_k := \varphi_k - \varphi - \frac{\pi}{2}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} (-i)^m e^{ik_z z} \frac{1}{2\pi} \int d\tilde{\varphi}_k e^{i[m\tilde{\varphi}_k + m\varphi + m\pi/2 + \kappa r_\perp \cos(\tilde{\varphi}_k + \frac{\pi}{2})]} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} \underbrace{(-i)^m e^{im\pi/2}}_{=1} e^{im\varphi} e^{ik_z z} \frac{1}{2\pi} \int d\tilde{\varphi}_k e^{i[m\tilde{\varphi}_k + \kappa r_\perp \cos(\tilde{\varphi}_k + \frac{\pi}{2})]} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} e^{im\varphi} e^{ik_z z} \frac{1}{2\pi} \int d\tilde{\varphi}_k e^{i[m\tilde{\varphi}_k - \kappa r_\perp \sin \tilde{\varphi}_k]}.\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Mit der Integraldarstellung  $J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i[m\varphi - x \sin \varphi]}$  der Besselfunktion erster Gattung, die man z. B. bei Temme [20] nachschlägt, erhält man schließlich

$$\psi_{\kappa k_z m}(r_\perp, \varphi, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi V}} J_m(\kappa r_\perp) e^{im\varphi} e^{ik_z z}. \quad (\text{A.21})$$

## A.4 Lösung des Integrals aus Abschnitt 5.2

Das in Abschnitt 5.2 zu berechnende Integral

$$\frac{d\sigma_{\text{int}}}{d\Omega} = r_e^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{d\tilde{\varphi}_k}{2\pi} \cos(\Delta m \tilde{\varphi}_k + \tilde{\delta}) \left| \hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k) \right|^2 \quad (\text{A.22})$$

ist nur für  $\Delta m \in \{0, 1, 2\}$  ungleich Null. Dies ist der Fall, da die Polarisationsvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k)$  nur Terme enthalten, die proportional zu  $\cos \tilde{\varphi}_k$  oder  $\sin \tilde{\varphi}_k$  sind oder nicht von  $\tilde{\varphi}_k$  abhängen. Das Betragsquadrat  $|\hat{\mathbf{e}}_{\sigma_f}^*(\theta, 0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\Lambda}(\theta_k, \tilde{\varphi}_k)|^2$  besteht daher nur aus Summanden, die proportional zu  $\cos^2 \tilde{\varphi}_k$ ,  $\sin^2 \tilde{\varphi}_k$ ,  $\cos \tilde{\varphi}_k \sin \tilde{\varphi}_k$ ,  $\cos \tilde{\varphi}_k$  oder  $\sin \tilde{\varphi}_k$  sind oder nicht von  $\tilde{\varphi}_k$  abhängen.

Für  $n \in \mathbb{N}$  gelten die Formeln

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx + \delta) \cos^2 x = \begin{cases} \pi \cos \delta, & n = 0, \\ \frac{\pi}{2} \cos \delta, & n = 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx + \delta) \sin^2 x = \begin{cases} \pi \cos \delta, & n = 0, \\ -\frac{\pi}{2} \cos \delta, & n = 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx + \delta) \cos x \sin x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin \delta, & n = 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx + \delta) \cos x = \begin{cases} \pi \cos \delta, & n = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx + \delta) \sin x = \begin{cases} -\pi \cos \delta, & n = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx + \delta) = \begin{cases} 2\pi \cos \delta, & n = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Damit ist offensichtlich, dass  $d\sigma_{\text{int}}/d\Omega$  für  $\Delta m \notin \{0, 1, 2\}$  stets verschwindet.



## Literatur

- [1] D. SEIPT, A. SURZHYKOV und S. FRITZSCHE: “Structured x-ray beams from twisted electrons by inverse Compton scattering of laser light”. *Phys. Rev. A* **90**: 012118 (2014). DOI: [10.1103/PhysRevA.90.012118](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.012118).
- [2] L. ALLEN, M. W. BEIJERSBERGEN, R. J. C. SPREEUW und J. P. WOERDMAN: “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes”. *Phys. Rev. A* **45**: 8185 (1992). DOI: [10.1103/PhysRevA.45.8185](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185).
- [3] A. M. YAO und M. J. PADGETT: “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications”. *Adv. Opt. Photonics* **3**: 161 (2011). DOI: [10.1364/AOP.3.000161](https://doi.org/10.1364/AOP.3.000161).
- [4] J. ARLT, V. GARCÉS-CHÁVEZ, W. SIBBETT und K. DHOLAKIA: “Optical micromanipulation using a Bessel light beam”. *Opt. Commun.* **197**: 239 (2001). DOI: [10.1016/S0030-4018\(01\)01479-1](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(01)01479-1).
- [5] J. DURNIN, J. J. MICELI, JR. und J. H. EBERLY: “Diffraction-free beams”. *Phys. Rev. Lett.* **58**: 1499 (1987). DOI: [10.1103/PhysRevLett.58.1499](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1499).
- [6] K. VOLKE-SEPULVEDA, V. GARCÉS-CHÁVEZ, S. CHÁVEZ-CERDA, J. ARLT und K. DHOLAKIA: “Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam”. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**: S82 (2002). DOI: [10.1088/1464-4266/4/2/373](https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/2/373).
- [7] O. MATULA, A. G. HAYRAPETYAN, V. G. SERBO, A. SURZHYKOV und S. FRITZSCHE: “Atomic ionization of hydrogen-like ions by twisted photons: angular distribution of emitted electrons”. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**: 205002 (2013). DOI: [10.1088/0953-4075/46/20/205002](https://doi.org/10.1088/0953-4075/46/20/205002).
- [8] F. GORI, G. GUATTARI und C. PADOVANI: “Bessel–Gauss beams”. *Opt. Commun.* **64**: 491 (1987). DOI: [10.1016/0030-4018\(87\)90276-8](https://doi.org/10.1016/0030-4018(87)90276-8).
- [9] R. M. HERMAN und T. A. WIGGINS: “Production and uses of diffractionless beams”. *J. Opt. Soc. Am. A* **8**: 932 (1991). DOI: [10.1364/JOSAA.8.000932](https://doi.org/10.1364/JOSAA.8.000932).
- [10] J. ARLT und K. DHOLAKIA: “Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon”. *Opt. Commun.* **177**: 297 (2000). DOI: [10.1016/S0030-4018\(00\)00572-1](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(00)00572-1).

## Literatur

- [11] U. D. JENTSCHURA und V. G. SERBO: “Compton upconversion of twisted photons: backscattering of particles with non-planar wave functions”. *Eur. Phys. J. C* **71**: 1571 (2011). DOI: [10.1140/epjc/s10052-011-1571-z](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1571-z).
- [12] I. P. IVANOV: “Colliding particles carrying nonzero orbital angular momentum”. *Phys. Rev. D* **83**: 093001 (2011). DOI: [10.1103/PhysRevD.83.093001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.093001).
- [13] J. D. JACKSON: *Classical Electrodynamics*. 3. Aufl., New York, N. Y.: Wiley, 1999.
- [14] W. GREINER: *Theoretische Physik*. Bd. 4A: *Quantentheorie: Spezielle Kapitel*. 3. Aufl., Thun und Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 1989.
- [15] J. J. SAKURAI: *Advanced Quantum Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1967.
- [16] L. D. LANDAU und E. M. LIFSHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Bd. 2: *Klassische Feldtheorie*. 12. Aufl., Berlin: Akademie Verlag, 1992.
- [17] R. G. NEWTON: *Scattering Theory of Waves and Particles*. 2. Aufl., Mineola, N. Y.: Dover Publications, 2002.
- [18] R. VASILYEU, A. DUDLEY, N. KHILO und A. FORBES: “Generating superpositions of higher-order Bessel beams”. *Opt. Express* **17**: 23389 (2009). DOI: [10.1364/OE.17.023389](https://doi.org/10.1364/OE.17.023389).
- [19] W. VOGEL und D.-G. WELSCH: *Quantum Optics*. 3. Aufl., Weinheim: Wiley-VCH, 2006.
- [20] N. M. TEMME: *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. New York, N. Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1996.



# Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen wurden, sind in jedem einzelnen Fall durch die Angabe der Herkunft kenntlich gemacht. Alle Grafiken wurden von mir selbst erstellt.

Die Arbeit wurde in dieser oder ähnlicher Form bisher bei keiner anderen Institution eingereicht.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Arbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 30. September 2014

.....  
Sebastian Stock